

ZUR
GRAPHISCHEN STATIK
DER
MASCHINENGETRIEBE.

EIN
LEITFADEN ZUM GEBRAUCHE
FÜR
MASCHINENTECHNIKER, BAUMEISTER UND INGENIEURE
SOWIE
ZUM UNTERRICHTE
AN
TECHNISCHEN LEHRANSTALTEN.

VON
GUSTAV HERRMANN,
Professor an der Königlichen Rheinisch-Westfälischen Polytechnischen Schule zu Aachen.

TEXT.

NEBST EINEM ATLAS MIT ACHT LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1879.

25/6. 39

371 H

in. Albany 176. 20.

ANKÜNDIGUNG.

In dem vorliegenden Werkchen übergeben wir dem technischen Publicum einen neuen Beitrag zur Anwendung der graphischen Statik auf das Maschinenwesen.

Bei den unbestrittenen Vorzügen der zeichnerischen Verfahrungsarten gegenüber den rechnerischen, wodurch erstere sich eine so allgemeine Beliebtheit in Ingenieurkreisen verschafft haben, darf mit Sicherheit erwartet werden, dass das hier vom Verfasser angegebene Verfahren dem ausführenden Techniker eine wesentliche Erleichterung bei dem Entwerfe und der Beurtheilung von Maschinen bieten und wegen der grossen Einfachheit ein brauchbares Unterrichtsmittel abgeben wird. Wir glauben daher, dieses Werk allen Maschinentechnikern, Baumeistern und Ingenieuren, sowie den technischen Lehranstalten bestens empfehlen zu dürfen.

Braunschweig, im Juni 1879.

Friedrich Vieweg und Sohn.

ZUR

GRAPHISCHEN STATIK

DER

MASCHINENGETRIEBE.

GEORGE HENRY STARR

MARSHALL EXETER

ZUR
GRAPHISCHEN STATIK
DER
MASCHINENGETRIEBE.

EIN
LEITFADEN ZUM GEBRAUCHE
FÜR
MASCHINENTECHNIKER, BAUMEISTER UND INGENIEURE
SOWIE
ZUM UNTERRICHTE
AN
TECHNISCHEN LEHRANSTALTEN.

VON
GUSTAV HERRMANN,
Professor an der Königlichen Rheinisch-Westfälischen Polytechnischen Schule zu Aachen.

TEXT.

NEBST EINEM ATLAS MIT ACHT LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1879.



Alle Rechte vorbehalten.

VORWORT.

Seit Culmann's epochemachendes Werk über die graphische Statik erschienen ist, hat die graphische Methode in Ingenieurkreisen ziemlich allgemeine Verbreitung erlangt; man hat ihre Vorzüge vor dem analytischen Verfahren mehr und mehr anerkannt und sich vielfach die weitere Ausbildung der Methode angelegen sein lassen. Hauptsächlich findet sie Anwendung beim Entwerfen stabiler Constructionen, wie Brücken, zur Ermittlung der Beanspruchungen der einzelnen Constructionsglieder. Auch beim Entwurfe von Maschinen bilden die zeichnerischen Verfahrungsarten werthvolle Hilfsmittel zur Bestimmung der Angriffsmomente der einzelnen Maschinentheile und zur Feststellung von deren Dimensionen. Demgemäss sind an den polytechnischen Schulen wohl ohne Ausnahme besondere Vorträge über „Graphische Statik“ eingeführt. Auch gewissen Gegenständen der Dynamik hat man die graphischen Methoden mit Vortheil angepasst, in welcher Beziehung nur auf die Arbeiten von Radinger über „Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit“ und Pröll, „Versuch einer graphischen Dynamik“, hingewiesen sein möge.

Bei allen diesen Ermittlungen ist indessen auf Reibungen und sonstige schädliche Nebenhindernisse der Bewegung keine Rücksicht genommen; vielmehr hat man die Ermittlung der schädlichen Widerstände in Maschinen und damit auch die Bestimmung des für die Praxis so wichtigen Wirkungsgrades derselben bisher ausschliesslich auf dem Wege der Rechnung vorgenommen, welcher oft genug sehr unbequem, häufig überhaupt nicht gangbar ist. Eine Methode, die Reibungswiderstände und den Wirkungsgrad eines beliebigen Maschinengetriebes durch Zeichnung zu bestimmen, ist mir bisher nicht bekannt geworden. Aus dem Wunsche, in meinen Vorträgen über Baumaschinen an der

hiesigen polytechnischen Schule die Kraftverhältnisse der Maschinengetriebe in einfacherer Art festzustellen, als das bisher allein angewandte rechnerische Verfahren gestattet, ist die in dem vorliegenden Schriftchen behandelte Methode entstanden, welche im Wesentlichen nur auf eine Erweiterung der längst bekannten, bisher nur viel zu wenig zur Anwendung gekommenen Lehre vom Reibungswinkel hinausläuft.

Mein Zweck bei der vorliegenden Arbeit bestand zunächst darin, dem studirenden Polytechniker, an dessen Zeit und Fleiss von Tag zu Tag sich steigende Anforderungen gestellt werden, eine wünschenswerthe Erleichterung beim Studium zu gewähren; vielleicht wird die kleine Arbeit auch für den ausführenden Techniker nicht ohne Nutzen sein.

Aachen, Mai 1879.

Gustav Herrmann.

INHALT.

	Seite
§. 1. Der Wirkungsgrad der Maschinengetriebe	1
„ 2. Gleichgewicht der Maschinengetriebe	7
„ 3. Die gleitende Reibung	12
„ 4. Die Zapfenreibung	20
„ 5. Die rollende Reibung	37
„ 6. Die Kettenreibung	40
„ 7. Die Seilsteifigkeit	48
„ 8. Die Zahnreibung	52
„ 9. Der Riemenbetrieb	58
„ 10. Beispiele	66
Schlussbemerkung	72

§. 1.

Der Wirkungsgrad der Maschinengetriebe.

Jedes Maschinengetriebe hat den Zweck, die Bewegung eines gewissen Maschinentheiles auf einen anderen solchen in bestimmter Weise zu übertragen. Bei dieser Uebertragung kann entweder die Bewegung ihrer Grösse und Richtung nach dieselbe bleiben, oder es kann in der einen oder anderen oder in jeder Hinsicht eine Veränderung stattfinden, und es kann das Verhältniss dieser Aenderung fortwährend constant bleiben oder in jedem Augenblicke ein anderes werden. Bei der Dampfmaschine z. B. wird die geradlinige Bewegung des Kolbens fortwährend durch die Kolbenstange ungeändert in Grösse und Richtung dem Kreuzkopfe mitgetheilt, während dessen geradlinige Verschiebung durch die Lenkerstange eine Bewegung des Kurbelzapfens erzeugt, deren Richtung stetig sich ändert, und für welche auch das Verhältniss der Grösse zu der Kreuzkopfschiebung fortwährend veränderlich ist. Durch zwei in einander greifende cylindrische Zahnräder wird die Umdrehung einer Axe unter gleichbleibendem Umsetzungsverhältnisse der Bewegung in eine entgegengesetzt gerichtete Drehung einer anderen Axe verwandelt.

Mit dem Verhältnisse zwischen den Weggrössen der beiden Maschinentheile steht auch das Verhältniss im engen Zusammenhange, welches zwischen der Kraft P , die den bewegenden Theil antreibt und dem Widerstande Q besteht, welcher der Bewegung des getriebenen Theiles entgegenwirkt. Würden bei der betrachteten Bewegung keinerlei schädliche Widerstände oder Nebenhindernisse, wie Reibungen, auftreten, so würde bekanntlich unter der Voraussetzung einer gleichmässigen Bewegung nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten für jeden Zeitabschnitt die mechanische Arbeit der treibenden Kraft genau gleich der in derselben Zeit von dem Widerstande geleisteten Arbeit sein. Man hätte, wenn p und q die Wege bedeuten, welche die Angriffspunkte von P und Q in den Richtungen dieser Kräfte zurücklegen, also unter Pp und Qq die Arbeiten, d. h. die Producte aus Kraft und Weg verstanden, in diesem Falle die Gleichung:

$$Pp = Qq \text{ oder } Pp - Qq = 0.$$

Für den Fall hingegen, dass die Bewegungen der beiden Maschinentheile oder auch nur die des einen nicht mit gleichbleibender Geschwindigkeit erfolgen, würde nach dem Princip der

lebendigen Kräfte beim Wegfall aller Nebenhindernisse die Bewegung durch die Gleichung charakterisirt sein:

$$Pp - Qq = L,$$

wenn L diejenige Arbeitsgrösse darstellt, welche die bewegten Massen M in der gedachten Zeit in Form von lebendiger Kraft gewonnen oder hergegeben haben. Je nachdem obiger Werth $Pp - Qq$ positiv oder negativ ist, haben die Massen der bewegten Theile Beschleunigungen oder Verzögerungen erhalten, und es folgt aus $Pp - Qq = 0$ offenbar eine gleichförmige Bewegung während der betrachteten Zeit. Jedenfalls folgt hieraus ferner, dass, immer unter der Voraussetzung des Wegfalls von Nebenhindernissen, durch keine Maschinenconstruction, sei sie wie auch immer beschaffen, an mechanischer Arbeit ein Gewinn oder ein Verlust entstehen kann, denn wenn in dem Falle der Ungleichheit von Pp und Qq die Massen M beschleunigt werden, so ist diese Beschleunigung mit einer Aufspeicherung von mechanischer Arbeit gleichbedeutend, welche letztere jederzeit in ihrem vollen Betrage wieder verfügbar ist.

Nun giebt es aber in Wirklichkeit keine Bewegung zweier Körper gegen einander, bei welcher nicht gewisse Nebenhindernisse auftreten, welche Hindernisse, da sie ganz allgemein den Charakter haben, der angestrebten Bewegung entgegen zu wirken, gewöhnlich als schädliche Widerstände bezeichnet werden, im Gegensatze zu den Nutzwiderständen, in deren Ueberwindung die durch die Maschine vermittelte nützliche Arbeit besteht. Solche schädliche Widerstände treten überall nur da auf, wo zwei Körper eine relative Bewegung gegen einander haben, z. B. als Reibung des drehbaren Zapfens in seinem ganz festen oder mit anderer Geschwindigkeit rotirenden Lager, als Widerstand der ruhenden Luft gegen bewegte Arme oder Flügel u. s. w. Diese widerstehenden Kräfte verschwinden sofort mit dem Aufhören der relativen Bewegung der gedachten beiden Körper. Dagegen muss man annehmen, dass in einem und demselben soliden Körper durch Einwirkungen von Zug- und Druckkräften, welche allerdings Entfernungen und Annäherungen der kleinsten Theile hervorbringen, Arbeitsverluste nicht herbeigeführt werden, da, so lange die betreffende Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird, jede nachherige Zusammenziehung eines Körpers denselben Arbeitsbetrag wieder hergiebt, welcher zur vorherigen Ausdehnung erforderlich gewesen ist; wenigstens dürften gegentheilige Erfahrungen nicht bekannt sein. Dass man nicht den Widerstand der Seilsteifigkeit als ein gegen obige Behauptung sprechendes Beispiel anführen kann, ergiebt sich aus der Bemerkung, dass bei der Biegung eines Seiles um eine Rolle in der That immer zwei verschiedene Körper, nämlich zwei Drähte oder zwei Hanffasern, einer relativen Verschiebung an einander ausgesetzt sind, sobald ihre Abstände von der Rollenaxe verschiedene sind.

Die schädlichen Widerstände W erfordern zu ihrer Bewältigung, während einer gewissen Bewegungsperiode, für welche der Weg des schädlichen Widerstandes W durch w ausgedrückt sein mag, gleichfalls eine bestimmte mechanische Arbeit Ww , welche für den technischen Zweck der Maschine gänzlich verloren ist, und meistens noch schädliche Einflüsse ausübt, sofern diese Arbeit in Molecularwirkungen verwandelt wird, als deren Resultat der Verschleiss der beweglichen Theile anzusehen ist. Unter Berücksichtigung dieser schädlichen Widerstände gilt die Gleichung

$$Pp - Ww = Qq + L \text{ oder auch } Pp - Ww = Qq,$$

wenn man in der letzteren Gleichung die zur Beschleunigung oder Verzögerung der Massen M gehörende Arbeit als positiven oder negativen Betrag in dem Werthe für die Nutzwirkung Qq

enthalten denkt. Die letztere Annahme, welche in der Folge im Allgemeinen zu Grunde gelegt werden möge, ist deswegen immer statthaft, weil, wie vorher bemerkt, jede in den Massen aufgespeicherte zur Beschleunigung aufgewandte Arbeit in ihrem vollen Betrage zur Verrichtung von Nutzarbeit verwendet wird, sobald die Geschwindigkeit der Massen wieder auf die vorherige Grösse herabsinkt. Durch ein solches regelmässiges Beschleunigen und Verzögern der Massen ist aber bekanntlich der sogenannte Beharrungszustand der Maschinen gekennzeichnet, welcher allein in dem hier vorliegenden Falle in Betracht kommt.

Es folgt aus dem Vorstehenden daher ohne Weiteres, dass bei allen Maschinen ohne Ausnahme die ausgeübte Nutzarbeit Qq kleiner ist, als die zur Bewegung aufzuwendende Arbeit Pp der treibenden Kraft und zwar genau um die Arbeit kleiner, welche die schädlichen Widerstände zu ihrer Ueberwindung erfordern. Je geringer die letzteren sind, desto vollkommener wird die Maschine ihren Zweck erfüllen, d. h. desto ökonomischer wird die Arbeit der treibenden Kräfte durch sie zur Verwendung gebracht. Man kann daher das Verhältniss der erzielten Nutzarbeit Qq zu der aufgewendeten Arbeit Pp der Betriebskraft als das Güteverhältniss der Maschine ansehen und pflegt mit diesem Namen oder demjenigen des Wirkungsgrades oder Nutzeffectes jenes Verhältniss $\frac{Qq}{Pp} = \eta$ zu belegen.

Der Wirkungsgrad einer Maschine, welcher im Folgenden immer mit η bezeichnet werden soll, ist dem Vorstehenden zufolge stets kleiner als die Einheit, welche letztere er nur in dem idealen Falle des Fortfallens aller schädlichen Widerstände W würde erreichen können. Der Werth von η wird offenbar um so kleiner ausfallen, je häufiger und je stärker die schädlichen Widerstände auftreten, und da die letzteren an allen Bewegungsstellen erscheinen, so ergibt sich hieraus, dass eine Maschine im Allgemeinen um so ökonomischer arbeiten wird, je einfacher sie in ihrer Zusammenstellung ist, sofern jeder neu hinzutretende Bewegungstheil durch Hinzufügung eines neuen schädlichen Widerstandes den Wirkungsgrad herabzieht. Es bedarf kaum der Bemerkung, dass der Werth des Nutzeffectes ausser von der Anzahl der schädlichen Widerstände wesentlich von deren Grösse abhängt, welche Grösse je nach der Art der Nebenhindernisse sehr verschieden sein kann. So giebt es nicht wenige Maschinen, deren Wirkungsgrad zufolge der beträchtlichen Nebenhindernisse bis auf wenige Procente herabsinkt, ja es kann der Werth von η sogar Null und negativ werden. Der Wirkungsgrad $\eta = \frac{Qq}{Pp}$ wird mit dem Zähler zu Null, also z. B. in allen denjenigen Fällen, wo eine Last Q in einer horizontalen Ebene bewegt wird, wie es also beim Fortrollen einer Last auf horizontaler Bahn, oder beim Umdrehen eines Krahns, einer Drehscheibe etc. der Fall ist, weil hierbei der im Sinne der Last Q genommene Weg q gleich Null ist. In solchem Falle wird die gesammte Arbeit der Triebkraft P zur Ueberwindung der schädlichen Widerstände W verwendet, und man hat für dergleichen Getriebe die Gleichung

$$Pp = Ww.$$

Setzt man ferner voraus, dass in einem Falle $Ww > Pp$ sei, so folgt aus der allgemeinen Gleichung:

$$Pp - Ww = Qq$$

ein negativer Werth für Qq , d. h. es muss in solchem Falle, um überhaupt die Bewegung möglich zu machen, die Kraft Q auf einem Wege $-q$ wirken, also in dem ihrer Richtung entgegengesetzten Sinne. Die Kraft Q wirkt daher jetzt nicht mehr als ein Widerstand, dessen

Ueberwindung durch die Maschine erreicht werden könnte, sie ist im Gegentheil als eine die Bewegung befördernde, in demselben Sinne wie P agirende Kraft zu denken. Von einer nutzbaren Arbeit kann daher nicht mehr die Rede sein, und wird man derartige Getriebe nicht anwenden können, um Bewegungen zu veranlassen, wohl aber können dieselben Verwendung finden, wenn es sich darum handelt, unbeabsichtigte Bewegungen zu verhindern. Jede Schraube, deren Gewinde nicht so steil sind, um unter Einfluss der Belastung ihrer Mutter selbstthätig zurückzugehen, ist für den Zustand des Rückganges ein solches Getriebe mit negativem Wirkungsgrade und gilt dasselbe auch für den Differentialflaschenzug bei den gewöhnlich gewählten Verhältnissen. Die vielfach in der Praxis angewendeten Klemmvorrichtungen, welche unter keinem auch noch so grossen Drucke sich lösen, und über welche im Folgenden ein Näheres angegeben werden soll, dürften sich in allen Fällen als Getriebe mit negativem Wirkungsgrade ansehen lassen.

Man kann den Wirkungsgrad auch noch in einer anderen Art definiren, welche vielfach gebräuchlich und in manchen Fällen bequemer ist. Denkt man sich nämlich für ein beliebiges Getriebe, an welchem wie oben die treibende Kraft P vermöge ihrer Arbeit Pp eine Nutzlast Q auf dem Wege q zu bewältigen vermag, die schädlichen Widerstände W fortfallend, so würde unter dieser als möglich gedachten Voraussetzung zur Verrichtung derselben Nutzleistung Qq offenbar eine Triebkraft P_0 erforderlich sein, welche, an derselben Stelle und in derselben Richtung wie P , also ebenfalls auf dem Wege p wirkend, einen kleineren Werth als P zu haben brauchte. Für diese Kraft P_0 hätte man natürlich wegen Nichtvorhandensein schädlicher Widerstände

$$P_0 p = Q q,$$

und es ergibt sich mit Rücksicht hierauf der Ausdruck für den Wirkungsgrad zu

$$\eta = \frac{Qq}{Pp} = \frac{P_0 p}{Pp} = \frac{P_0}{P}.$$

Bezeichnet man der Kürze wegen die Kraft P_0 als die theoretische und P als die wirkliche Betriebskraft, so erklärt sich der Wirkungsgrad als das Verhältniss der theoretischen zur wirklichen Betriebskraft, und es stellt demgemäss dieser Werth denjenigen Procentsatz der anzuwendenden Triebkraft P dar, welcher zur Ueberwindung des Nutzwiderstandes dient.

Dächte man sich andererseits unter der Annahme der völlig reibungslosen Bewegung die Kraft P auf dem Wege p wirksam, so würde dieselbe einen Widerstand Q_0 auf dem Wege q überwinden können, welcher theoretische Widerstand Q_0 einen grösseren Betrag haben würde, als der wirklich zu bewältigende Nutzwiderstand Q . Man hätte dann aus $Pp = Q_0 q$ den Wirkungsgrad auch

$$\eta = \frac{Qq}{Pp} = \frac{Qq}{Q_0 q} = \frac{Q}{Q_0},$$

d. h. gleich dem Verhältnisse des wirklichen Nutzwiderstandes Q zu dem theoretischen Q_0 .

Nimmt man bei irgend einem Maschinengetriebe mit einer gewissen Nutzlast Q die Triebkraft kleiner an, als P , so kann eine Bewegung im Sinne von P nicht eintreten, das Getriebe bleibt daher in Ruhe. Letzteres ist zunächst auch noch der Fall, sobald die Triebkraft bis auf den theoretischen Werth P_0 vermindert wird. Wären nun keine Nebenhindernisse der Bewegung vorhanden, so müsste bei der geringsten fernerer Verkleinerung von P unter P_0 das Ge-

triebe eine rückgängige Bewegung annehmen, indem die Belastung Q in diesem Falle als treibende Kraft auftritt. Da nun aber auch der rückgängigen Bewegung gewisse schädliche Widerstände, welche mit (W) bezeichnet werden mögen, sich entgegenstellen, so wird der Rückgang durch Q erst von dem Augenblicke an veranlasst werden können, in welchem die Kraft P durch weitere Verkleinerung unter P_0 zu einem Werthe (P) herabgesunken ist, für welchen man hat

$$Qq - (W)w = (P)p.$$

Diese Kraft (P) , welche gerade noch im Stande ist, die rückgängige Bewegung des Getriebes zu verhindern, ist sonach kleiner als die theoretische Betriebskraft P_0 , und zwar um so mehr, je grösser die beim Rückgange auftretenden Widerstände (W) sind. Man spricht auch von einem Wirkungsgrade des Rückganges, indem man hierunter das Verhältniss

$$(\eta) = \frac{(P)}{P_0}$$

der zur Verhinderung des Rückganges in Wirklichkeit erfordernten Kraft (P) zu der theoretischen Kraft P_0 versteht. Diese Definition stimmt mit derjenigen des Wirkungsgrades η für den Vorwärtsgang offenbar überein, wie man sogleich erkennt, wenn man die Last Q als treibende Kraft und die dem Rückgange entgegenwirkende Kraft (P) als Nutzwiderstand auffasst. Aus den vorhergehenden Betrachtungen geht hervor, dass die beiden Werthe P und (P) diejenigen Grenzen ergeben, zwischen denen die Triebkraft liegen kann, ohne dass das Getriebe in Bewegung geräth, und dass jede Vergrösserung der Kraft über P eine Bewegung im Sinne derselben, jede Verkleinerung unter (P) eine Bewegung im Sinne von Q zur Folge hat. Die Untersuchung der Rückgangsbewegung ist von Wichtigkeit für alle diejenigen Getriebe, bei welchen der Nutzwiderstand Q seiner Natur nach als treibende Kraft auftreten kann, also z. B. bei allen Windvorrichtungen, wo die Grösse (P) die Bremskraft vorstellt, durch deren Anbringung dem unbeabsichtigten Sinken der Last Q entgegengewirkt werden muss. Dagegen ist die Rückgangsbewegung nicht möglich bei solchen Maschinen, bei denen der Nutzwiderstand Q erst durch die eingeleitete Bewegung selbst hervorgerufen wird, wie dies unter Anderem bei allen denjenigen Arbeitsmaschinen der Fall ist, deren Zweck in einer Formveränderung von Körpern besteht, z. B. den Mühleneinrichtungen.

Für den Wirkungsgrad (η) des Rückganges gelten die nämlichen Bemerkungen, welche vorstehend hinsichtlich der Grösse η für den Vorwärtsgang gemacht wurden. Auch (η) ist immer kleiner als Eins und kann unter Umständen negativ werden. Wenn der letztere Fall eintritt, so ist damit ausgesprochen, dass ein selbstthätiges Rückwärtsgehen des Getriebes unter Einfluss der Belastung Q nicht eintreten kann, dass also das Getriebe die Eigenschaft der selbstthätigen Sperrung besitzt. Als Beispiele dieser Art können die gewöhnlichen Schraubenwinden und die Differentialflaschenzüge angesehen werden. Solche selbstsperrende Getriebe bieten zwar in der Anwendung zu Hebevorrichtungen manche Bequemlichkeit und grosse Sicherheit gegen unbeabsichtigtes Rückgehen dar, sie sind aber fast immer mit dem Uebelstande eines geringen Wirkungsgrades behaftet, daher sie wegen ihrer wenig ökonomischen Wirkung nicht zu empfehlen sind in Fällen, in denen bedeutende mechanische Arbeiten verrichtet werden sollen. Dass mit der Eigenschaft der Selbstsperrung eines Getriebes, d. h. mit der Bedingung $(\eta) \geq 0$ immer ein geringer Werth des Wirkungsgrades η verbunden

ist, lässt sich aus der folgenden Betrachtung erkennen. Aus $(\eta) = \frac{(P)}{P_0} = 0$ folgt $(P) = 0$, also $Qq = (W)w$.

Andererseits hat man für den Vorwärtsgang

$$Pp = Qq + Ww.$$

Wären die schädlichen Widerstände W für den Vorwärtsgang und (W) für den Rückgang von gleicher Grösse, so würden jene Gleichungen in Verbindung mit $W = (W)$ liefern:

$$Pp = Qq + Ww = 2 Qq \text{ oder: } \eta = \frac{Qq}{Pp} = \frac{1}{2}.$$

Jene Annahme $W = (W)$ ist aber nicht genau zutreffend, da die schädlichen Widerstände sowohl von P wie von Q abhängig sind, und es wird daher im Allgemeinen $W > (W)$ sein müssen. Mit Rücksicht hierauf ergibt sich denn, dass der Wirkungsgrad noch η kleiner als $\frac{1}{2}$ sein muss, und man kann daher ganz allgemein behaupten, dass jedes Getriebe mit Selbstsperrung nur einen Wirkungsgrad haben kann, welcher weniger als 50 Procent beträgt, ein Ergebniss, welches die Erfahrung bei den angeführten Schraubenwinden und Differentialflaschenzügen bestätigt.

Die in der Technik zur Verwendung kommenden Maschinen setzen sich in den meisten Fällen derart aus einzelnen elementaren Getrieben zusammen, dass die an dem ersten Getriebe zur Bewältigung des Nutzwiderstandes Q anzubringende Triebkraft P' für das folgende Getriebe als Nutzwiderstand Q' zu betrachten ist, zu dessen Bewältigung an diesem zweiten Getriebe die treibende Kraft P'' angebracht werden muss, und so fort. Betrachtet man z. B. eine gewöhnliche Speicherwinde, so bildet das Seil mit der Seiltrommel ein Getriebe, bei welchem die an dem Seilhaken hängende Last Q den Nutzwiderstand vorstellt, zu dessen Bewältigung am Umfange des mit der Trommel vereinigten Zahnrades die Triebkraft P' erfordert wird. Diese Kraft P' bildet dann für das erste Zahnradvorgelege, welches als zweites Getriebe aufgefasst werden muss, den Nutzwiderstand $Q' = P'$, derart, dass eine Triebkraft P'' am Umfange des auf der Vorgelegswelle befindlichen zweiten grösseren Rades wirksam sein muss. Ebenso stellt diese Kraft P'' den Widerstand Q'' für das dritte Getriebe vor, welches durch das zweite Zahnradpaar und die Kurbel dargestellt wird. Zur Ueberwindung dieses Widerstandes Q'' ist dann am Kurbelgriffe die Triebkraft P erforderlich. Wenn die Last Q nicht direct von der Seiltrommel herabhängt, sondern wie bei Krähnen das Seil oder die Kette zuvörderst über eine oder mehrere Rollen geleitet wird, so ist auch jede dieser Rollen als besonderes Getriebe aufzufassen. In gleicher Art lässt sich jede, wenn auch aus noch so vielen Theilen zusammengesetzte Maschine in ihre einfachen Elementargetriebe zerlegen. Es gewährt eine solche Zerlegung grosse Erleichterung bei der Bestimmung des Wirkungsgrades der Maschinen, insofern die Anzahl der gebräuchlichen Elementargetriebe eine sehr beschränkte, die Mannichfaltigkeit der zusammengesetzten Maschinen dagegen eine fast unendliche ist.

Hinsichtlich des Wirkungsgrades einer aus beliebig vielen Elementen bestehenden Maschine lässt sich zunächst ein allgemeines Gesetz hinstellen. Bezeichnet man wieder mit Q die Nutzlast, mit q den Weg derselben bei einer kleinen Bewegung, und bedeuten $P_1, P_2 \dots P_n$ die Triebkräfte der einzelnen Getriebe, und $p_1, p_2 \dots p_n$ die entsprechenden Wege dieser Kräfte, so hat man, unter $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$ die Wirkungsgrade der einzelnen Elementargetriebe verstanden, für das erste Getriebe:

$$\frac{Qq}{P_1 p_1} = \eta_1.$$

Für das zweite Getriebe, für welches P_1 als Nutzlast und P_{II} als Triebkraft zu denken ist, folgt ebenso

$$\frac{P_1 p_1}{P_{II} p_{II}} = \eta_{II}$$

und so fort für alle einzelnen Getriebe. Durch Multiplication aller dieser Gleichungen erhält man daher

$$\frac{Qq}{P_1 p_1} \cdot \frac{P_1 p_1}{P_{II} p_{II}} \cdot \frac{P_{II} p_{II}}{P_{III} p_{III}} \dots \frac{Q_{n-1} p_{n-1}}{P p} = \eta_1 \eta_{II} \eta_{III} \dots \eta_n \text{ oder } \frac{Qq}{P p} = \eta = \eta_1 \eta_{II} \eta_{III} \dots \eta_n,$$

d. h. der Wirkungsgrad einer aus beliebig vielen Einzelgetrieben zusammengesetzten Maschine ist gleich dem Producte aus den Wirkungsgraden aller einzelnen Getriebe.

Mit Rücksicht darauf, dass der Wirkungsgrad jedes einzelnen Getriebes immer kleiner als die Einheit ist, folgt hieraus die schon früher gemachte Bemerkung, dass der Nutzeffect einer Maschine im Allgemeinen abnimmt, wenn die Anzahl der sie bildenden Elemente grösser wird.

Da ferner das obige Product nicht negativ werden kann, so lange alle Factoren positiv sind, so folgt daraus weiter, dass eine Maschine nur dann selbstsperrend ist, wenn diese Eigenschaft wenigstens einem ihrer Elementargetriebe zukommt.

§. 2.

Gleichgewicht der Maschinengetriebe.

Wenn auch die Maschinen ihrer Natur nach nur während ihrer Bewegung und vermöge derselben ihren Zweck erfüllen können, so kann man der Ermittlung der Kraftverhältnisse doch immer die Betrachtung desjenigen Gleichgewichtszustandes zu Grunde legen, welcher der Grenze entspricht, wo die geringste Vergrösserung der treibenden Kraft eine in deren Sinne gerichtete Bewegung hervorruft. Es soll im Folgenden wieder unter P diese treibende Kraft und unter Q der Nutzwiderstand verstanden und von einer Beschleunigung der Massen vor der Hand abgesehen werden, indem man eine gleichförmige Bewegung voraussetzt, bei welcher für jeden Augenblick die Arbeit der Kraft während eines kleinen Zeittheils gerade ausreichend ist, um neben den schädlichen Widerständen W den Nutzwiderstand Q zu bewältigen. In welcher Art die bei einer ungleichförmigen Bewegung auf die Massen M wirkende, beschleunigende Kraft zu ermitteln ist, wird sich dann in einzelnen Fällen leicht ergeben.

Die auf ein beliebiges Maschinengetriebe wirkenden äusseren Kräfte P und Q rufen zwischen den einzelnen Gliedern der Maschine überall da, wo zwei Theile sich gegen einander stützen, gewisse Stützkkräfte oder Reactionen R hervor, welche an jeder Stützfläche als zwei gleich-

grosse und in derselben Geraden entgegengesetzte Kräfte anzusehen sind. Je zwei solche in demselben Punkte auftretende Kräfte stehen daher im Gleichgewichte. Solche Reactionen hat man sich an jeder Berührungsfläche zweier Körper mit einander zu denken, gleichviel, ob die Körper daselbst eine relative Bewegung gegen einander haben oder nicht. Man kann daher auch überall die Stützung eines Körpers durch einen anderen unter Wegnahme dieses letzteren dadurch ersetzt denken, dass man für denselben die von ihm auf den gestützten Körper ausgeübte Reaction R einführt. Dies vorausgesetzt, wird daher irgend ein Glied einer beliebigen Maschine, das von gewissen äusseren Kräften, wie P und Q , angegriffen und an gewissen Stellen von benachbarten Körpern gestützt wird, für den betrachteten Grenzzustand im Gleichgewichte sein müssen unter Einfluss jener äusseren Kräfte P und Q und derjenigen Reactionen R , welche geeignet sind, die gedachten Stützen zu ersetzen. Die Bedingungen des Gleichgewichts geben daher im Allgemeinen ein Mittel an die Hand, aus den bekannten Elementen, Richtung und Grösse der einzelnen Kräfte, die übrigen nicht bekannten zu ermitteln. In den meisten Fällen sind die Reactionen der Stützen ihrer Grösse nach unbekannt, von den äusseren Kräften ist in der Regel ein Element, eine Richtung, oder eine Kraftgrösse vorläufig noch nicht bekannt. Was die Richtung der eine Stütze ersetzenden Reaction betrifft, so ist dieselbe erfahrungsmässig an die Bedingung geknüpft, dass sie gegen die Stützfläche unter einem ganz bestimmten Winkel geneigt ist, dessen Grösse von der Beschaffenheit des Materials, wie Glätte, Härte, Schlüpfrigkeit etc., der beiden sich berührenden Körper abhängt. Von dieser Beschaffenheit des Materials und der Stützflächen hängen die schädlichen Widerstände W der Bewegung ab, welche nach dem früher Bemerkten lediglich an den Berührungsstellen zwischen zwei Körpern auftreten, die eine relative Bewegung gegen einander haben, d. h. also an Stützflächen. Die Grösse des Winkels, unter welchem die Berührungsfläche zwischen zwei Körpern von der Richtung der zwischen den letzteren stattfindenden Reaction geschnitten wird, steht mit der Grösse des an dieser Stelle auftretenden schädlichen Widerstandes, wie aus dem Folgenden sich ergeben wird, im engen Zusammenhange.

Setzt man zunächst voraus, dass ein schädlicher Widerstand W überhaupt nicht vorhanden wäre, ein Zustand, wie er natürlich nie in der Praxis vorhanden ist, so wäre der Winkel, unter welchem die Reaction gegen die Stützfläche gerichtet ist, gleich einem Rechten anzunehmen, mit anderen Worten, ohne irgend welchen schädlichen Widerstand könnte eine Stützfläche in jedem ihrer Punkte nur in der Richtung der Normale daselbst reagiren. Unter dieser Annahme gänzlichen Wegfallens schädlicher Widerstände ist es nun sehr einfach, für die verschiedenen Maschinengetriebe in jeder Stellung derselben das Verhältniss von Kraft und Last zu bestimmen, und man wendet zu diesem Behufe vortheilhaft ein graphisches Verfahren an. Einige Beispiele mögen dieses Verfahren erläutern.

Taf. I. Fig. 1.

Es seien A , B und C , Fig. 1 Taf. I, die Mittelpunkte der Zapfen eines Winkelhebels, dessen Mittelzapfen C durch das feste Lager C_1 gestützt werde, während der eine Endzapfen A von dem Kopflager oder Auge A_1 der Stange $A_1 A_2$ und der andere Endzapfen B von dem Auge B_1 der Stange $B_1 B_2$ umschlossen werde. Wirkt nun auf das untere Ende A_2 der Stange $A_1 A_2$ nach gewisser Richtung eine Kraft Q , so wird nach dem Vorstehenden die Stange $A_1 A_2$ im Gleichgewichte sein müssen unter dieser Kraft Q und der den Zapfen A ersetzenden Reaction R_1 , welche letztere senkrecht auf der cylindrischen Zapfenfläche stehen, also durch den Mittelpunkt A hindurchgehen muss. Zwei Kräfte können aber nur im Gleichgewichte sein, wenn sie in derselben Geraden in gleicher Grösse entgegengesetzt wirken, woraus ohne Weiteres folgt, dass die

Kraft Q durch den Mittelpunkt von A gerichtet sein muss, dass also, wenn dies von vornherein nicht der Fall sein sollte, eine Drehung der Stange $A_1 A_2$ um den Zapfen A so lange erfolgen wird, bis jener Bedingung genügt ist. In derselben Weise folgt auch, dass die Richtung der die Stange $B_1 B_2$ angreifenden Kraft P durch den Mittelpunkt B hindurchgehen muss, und dass der Zapfen B auf die Stange $B_1 B_2$ in deren Auge eine Reaction R_2 ausüben wird, welche gleich und entgegengesetzt P ist. Die Stange $A_1 A_2$ wird natürlich durch die Kräfte Q und R_1 und die Stange $B_1 B_2$ durch die Kräfte P und R_2 auf Zug in Anspruch genommen, d. h. es werden in dem Materiale der Stangen innere elastische Spannungen hervorgerufen, welche in irgend welchem Querschnitte derartig auftreten, dass sie an jedem der beiden Stangenenden, welche durch diesen Querschnitt getrennt werden, mit den auf dieses Ende wirkenden äusseren Kräften im Gleichgewichte sind. Diese inneren Kräfte sind daher für die Bestimmung der Querschnittsdimensionen der einzelnen Maschinentheile von grosser Bedeutung; auf den Gleichgewichtszustand der Maschine haben sie aber keinen directen Einfluss. Auf die Bestimmung der Querschnittsabmessungen soll weder hier noch in der Folge näher eingegangen werden, es muss in dieser Hinsicht auf die bekannten Lehrbücher über die Festigkeitstheorie und Maschinenconstructionslehre verwiesen werden. Betrachtet man nun weiter den eigentlichen Hebel ABC , so wirken auf denselben in A und B die äusseren Kräfte Q und P , und man kann das den Mittelzapfen C unterstützende Lager C_1 ersetzt denken durch eine Reaction R_3 , welche durch den Mittelpunkt C hindurchgeht. Diese drei Kräfte Q , P und R_3 müssen daher für den betrachteten Zustand mit einander im Gleichgewichte sein. Letzteres ist bekanntlich nur möglich, wenn alle drei Kräfte in einem und demselben Punkte sich schneiden, daher die von dem Lager C_1 auf den Drehzapfen ausgeübte Reaction R_3 auch durch den Schnittpunkt O der beiden Kraftrichtungen von P und Q hindurchgehen muss. Nunmehr ist die verhältnissmässige Grösse von P , Q und R leicht bestimmt, wenn man die gegebene Last $Q = OD$ macht und das Parallelogramm $ODFE$ construirt, dessen andere Seite in OB und dessen Diagonale in OC fällt. Man findet dann in OE die Kraft P und in OF den Druck des Zapfens C auf sein Lager, also in FO die Lagerreaction R_3 gegen den Drehzapfen C .

Diese verhältnissmässigen Grössen von Q , P und R_3 entsprechen dem mehrgedachten Grenzzustande, bei welchem die geringste Vergrösserung von Q oder P eine Bewegung im Sinne dieser Kräfte veranlasst, wie man auch aus der Figur sogleich erkennt; denn nimmt man Q etwas grösser an, z. B. gleich OD' , so geht die Diagonale OF' , welche den Zapfendruck gegen das Lager repräsentirt, links an dem Zapfenmittel C vorbei, was auf eine Bewegung im Sinne von Q hindeutet. Andererseits giebt eine Vergrösserung von P , etwa gleich OE' , einen Zapfendruck OF'' , welcher eine Rechtsdrehung des Hebels zur Folge haben wird.

Als ein ferneres Beispiel möge das Kurbelgetriebe, Fig. 2, Taf. I, angeführt werden. Die von der Kolbenstange AA' auf den Bolzen A des Kreuzkopfes wirkende Kolbenkraft P wird hierbei durch die Lenkerstange $A_1 B_1$ nach der Kurbelwarze B übertragen, und es muss unter der Voraussetzung einer gänzlich reibungslosen Bewegung die durch die Stange übertragene Kraft T durch die Mittelpunkte von A und B gerichtet sein, da diese Kraft senkrecht auf den Berührungsflächen der Zapfen A und B mit ihren Lagern steht. Da die beiden Kräfte P und T verschiedene Richtung haben, so kann der Bolzen A unter deren alleiniger Einwirkung nicht im Gleichgewichte sein, hierzu ist vielmehr noch eine von der festen Führung $D_1 D_2$ auf den Kreuzkopf D ausgeübte Reaction R_1 erforderlich. Die letztere auf der Stützfläche $D_1 D_2$ senkrechte Kraft muss zu diesem Behufe durch den Schnittpunkt A der Kolbenkraft P und der Stangen-

Fig. 2, Taf. I.

kraft T hindurchgehen. Man findet daher sehr leicht aus der bekannten Kolbenkraft $P = AF$ die Kräfte R_1 und T , wenn man das Dreieck AFG zeichnet, so dass FG parallel mit R_1 , d. h. senkrecht zur Führung $D_1 D_2$ ist. Wenn nun an der Axe C der Kurbel CB im Abstände CJ ein Widerstand Q auftritt, etwa in der Art, dass ein auf C befindliches Zahnrad CJ bei J im Eingriffe mit einem anderen Zahnrade JK steht, dessen Umfangswiderstand Q ist, so muss die Kurbel nebst ihrer Axe C wiederum im Gleichgewichte sein unter Einwirkung der in B angreifenden Stangenkraft T , des in J wirkenden Widerstandes Q und der von dem festen Lager C_1 auf die Axe C ausgeübten Reaction R_2 . Die Richtung der letzteren findet sich wieder in der geraden Verbindungslinie von O mit C , wenn O den Durchschnittspunkt von Q mit T bedeutet. Man findet daher die Grösse von Q und R_2 aus dem über $AG = T$ gezeichneten Dreiecke AGH , dessen beide anderen Seiten parallel mit Q und R_2 sind, so dass GH die Lagerreaction R_2 und HA den Widerstand darstellt, welcher in dem betrachteten Augenblicke von dem Rade CJ überwunden werden kann. Man erkennt sogleich, dass das gegenseitige Verhältniss von P und Q mit jedem Augenblicke sich ändern muss, und es ist daraus ersichtlich, dass bei einer constanten Kolbenkraft P die Grösse des bei J zu überwindenden Widerstandes Q zwischen Null in den Todtlagen der Kurbel und einem grössten Werthe in einer gewissen Zwischenlage schwankt. Wenn daher der gewöhnliche Fall vorliegt, dass der Widerstand constant ist, welchen das Rad KJ der Bewegung der Kurbel entgegensetzt, so wird dieser Widerstand einen mittleren zwischen Null und dem grössten Betrage von Q liegenden Werth haben müssen, und es wird daher eine Beschleunigung oder Verzögerung der Massen (Schwungrad) stattfinden, je nachdem der ermittelte Werth von Q diesen durchschnittlichen Betrag des Arbeitswiderstandes zwischen den Radzähnen übertrifft oder darunter herabsinkt. Diese Eigenthümlichkeit des Kurbelgetriebes ist bekannt genug, um ein näheres Eingehen darauf an dieser Stelle überflüssig erscheinen zu lassen.

In ähnlicher Art, wie hier an zwei Beispielen gezeigt ist, kann man in allen Fällen das Verhältniss zwischen der Kraft P_0 und dem Widerstande Q ermitteln, und es dürfte das hier angewendete graphische Verfahren in den meisten Fällen wegen seiner Einfachheit und Anschaulichkeit grosse Vorzüge vor den rechnerischen Methoden darbieten, welche letzteren häufig zu sehr verwickelten Ausdrücken führen. Letzteres gilt insbesondere dann, wenn es darauf ankommt, die schädlichen Widerstände der Bewegung gleichfalls in Rechnung zu bringen, wenn es sich also nicht um die Ermittlung von P_0 oder Q_0 , sondern von P oder Q handelt. Die Bestimmung der thatsächlichen Kraftverhältnisse unter Berücksichtigung der Nebenhindernisse ist für die Praxis von viel grösserer Bedeutung, als die vorstehend angedeutete Ermittlung der theoretischen Kraft, indem der ökonomische Werth oder das Güteverhältniss irgend einer Getriebeconstruction wesentlich von der Grösse der mit ihr verknüpften Nebenhindernisse abhängt. Diese schädlichen Widerstände pflegt man bisher meistens auf dem Wege der Rechnung zu bestimmen, graphische Methoden zur Bestimmung der Reibungen und damit des Wirkungsgrades der Maschinengetriebe sind bisher nur in geringem Umfange zur Verwendung gekommen, wenigstens finden sich in den bekannten Lehrbüchern der Mechanik und Maschinenlehre meistens nur die Formeln zu diesen Bestimmungen angegeben. Wie umständlich derartige analytische Untersuchungen oft bei den einfachsten Getrieben werden, sobald die Rechnung mit einiger Schärfe durchgeführt werden soll, ist bekannt. Beispielsweise gelangt man schon bei dem einfachen Winkelhebel, Fig. 1, Taf. I, oder einer Seilrolle mit nicht parallelen Seilenden zu dem Ausdrucke für die Zapfenreibung nur durch eine unbequeme Wurzelgrösse, ein Umstand, welcher

bei Seilführungen wie Flaschenzügen häufig Veranlassung wird, die einzelnen Seilrichtungen in der Rechnung als parallel anzunehmen, selbst wenn sie merkliche Abweichungen von einander haben. Aus demselben Grunde pflegt man bei der Berechnung des Kurbelgetriebes in den meisten Fällen eine unendlich grosse Länge der Lenkerstange vorauszusetzen, um die Ausdrücke, in denen der Winkel der Lenkerstange gegen die Kolbenstange vorkommt, durch Beseitigung dieses Winkels handlicher zu machen. Bei den wesentlichen Vorthellen, welche andererseits die Anwendung graphischer Methoden bei der Construction der Maschinenelemente gewährt, so namentlich in Bezug auf die Bestimmung der Angriffsmomente von Axen, Kurbeln etc., dürfte daher der Gedanke nahe liegen, auch die Nebenhindernisse bei der zeichnerischen Ermittlung der Kraftverhältnisse in geeigneter Weise zum Ausdrucke zu bringen. Diesem Gedanken sind die folgenden Betrachtungen entsprungen. Es wird sich im Verlaufe derselben zeigen, dass die graphische Ermittlung der thatsächlichen Kraftverhältnisse in derselben einfachen und sicheren Weise geschehen kann, wie es in dem Vorstehenden an einigen Beispielen unter Vernachlässigung aller Nebenhindernisse angegeben wurde, und es ist klar, dass man durch Vergleichung des auf solche Weise erhaltenen Resultats für P oder Q mit dem für P_0 oder Q_0 erhaltenen ohne Weiteres auch zu einem Urtheile über den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{Q}{Q_0}$$

gelangt. Dabei ist das hierbei anzuwendende Verfahren durchaus nicht verschieden von dem oben für die Ermittlung der theoretischen Kraft angedeuteten, und es genügt in den meisten Fällen die einfache Verzeichnung des Kräftepolygons, um das gesuchte Resultat zu finden. Es wird sich also wesentlich nur darum handeln, die einzelnen schädlichen Widerstände graphisch zum Ausdrucke zu bringen; diese Aufgabe zu lösen, soll im Folgenden versucht werden.

Die bei den Maschinengetrieben in Betracht kommenden Nebenhindernisse sind ihrer Art nach nur wenige, und bestehen, wenn von dem Widerstande des Mediums abgesehen wird, hauptsächlich nur in der Reibung, welche als gleitende, Zapfen-, Rollen-, Ketten- und Zahnreibung auftreten kann. Die Steifigkeit der Seile lässt sich ähnlich wie die Kettenreibung berücksichtigen. Im Folgenden sollen diese Widerstände einzeln behandelt werden. Von dem Widerstande der Luft oder des Wassers ist hier abgesehen, weil derselbe für die gewöhnlichen Maschinengetriebe in der Regel als unerheblich ausser Acht gelassen werden darf und meistens auch unbeachtet gelassen wird. In einzelnen Fällen und bei besonderen Maschinen, wo eine solche Vernachlässigung nicht zulässig ist, bei welcher vielleicht (Ventilatoren) die Bewegung des Mittels die Hauptsache ausmacht, hat die Bestimmung dieses Widerstandes, welcher nunmehr nicht mehr schädlicher, sondern Nutzwiderstand ist, nach den dafür geltenden Regeln der Hydraulik zu geschehen, und es ist derselbe dann als besondere äussere Kraft einzuführen.

§. 3.

Die gleitende Reibung.

Fig. 3, Taf. I.

Eine Last, welche mit ihrem Gewichte $AB = Q$ (Fig. 3, Taf. I) auf eine horizontale Fläche GG drückt, ruft im Zustande der Ruhe Reactionen der Stützfläche in deren einzelnen Punkten hervor, derart, dass die Mittelkraft aus allen diesen Reactionen dem Gewichte Q gleich und in dessen Richtung entgegengesetzt ist. Diese Reaction geht daher durch denselben Punkt D der Stützfläche wie das Gewicht Q . Nun ist es bekannt, dass zur horizontalen Verschiebung des Körpers A auf GG eine gewisse in die Verschiebungsrichtung fallende Kraft $P = \mu Q$ erforderlich ist, unter μ den betreffenden Reibungscoefficienten verstanden. Ist diese in einem beliebigen Punkte A des Körpers angreifende Kraft P durch AC in der Figur dargestellt, so folgt, dass der Körper A durch die beiden Kräfte P und Q ergriffen wird, welche Kräfte mit der Reaction R der Stützfläche noch eben im Gleichgewichte sein müssen, wenn man hier wie in der Folge immer denjenigen Grenzzustand der Betrachtung unterwirft, in welchem die geringste Vergrößerung von P eine Bewegung herbeiführen würde. Dieser Gleichgewichtszustand bedingt daher eine Reaction $R = EA$ der Stützfläche gegen den Körper, welche gleich und in derselben Geraden entgegen der Mittelkraft von P und Q wirkt. Aus $P = \mu Q$ bestimmt sich der Winkel $\varphi = EAB$, welchen diese Mittelkraft mit der Normale AB zur Stützfläche bildet, durch

$$\mu = \frac{P}{Q} = \tan \varphi,$$

und man nennt diesen Winkel bekanntlich den Reibungswinkel für die beiden Materialien der Körper A und GG . Denkt man sich die Kraft P von Null aus allmählich bis zu dem Werthe AC zunehmend, so wird die von der Stützfläche GG ausgeübte Reaction von ihrer ursprünglichen Richtung BA aus allmählich in diejenige EA abgelenkt, und es wird für alle zwischen BA und EA fallenden Richtungen der Reaction der Gleichgewichtszustand gewahrt bleiben. Der Durchschnittspunkt der Reaction rückt dabei von D nach F , und man kann sich immer diesen Durchschnittspunkt als den Angriffspunkt vorstellen, in welchem die Resultirende aller elementaren Reactionen der Flächentheile der Berührungsfläche wirksam ist. Diese Beziehungen gelten offenbar immer, nach welcher Richtung die horizontale Kraft P auch gerichtet sein möge, und es wird z. B. für die Richtung von P nach AC_1 die Reaction der Stützfläche durch die Linie E_1A gegeben sein. Bei einer ganzen Umdrehung der Kraft P in ihrer horizontalen Ebene beschreibt daher die Reaction einen um AB concentrischen Kegelmantel, welcher unter dem Namen Reibungskegel bekannt ist, und welcher denjenigen Raum begrenzt, innerhalb dessen die Reaction der Stützfläche GG gegen den Körper A gelegen sein kann, ohne dass Bewegung eintritt. Man hat daher die Stützfläche als mit solcher Eigenschaft behaftet zu denken, vermöge deren sie im Stande ist, gegen den gestützten Körper unter Richtungen zu reagiren, welche von der Normale um Winkel abweichen, die kleiner sind als der Reibungswinkel, und es muss in demjenigen Augenblicke Bewegung

eingeleitet werden, wo diese Ablenkung den Reibungswinkel φ um das geringste Maass überschreitet. Man kann diese Eigenschaft der materiellen Flächen daher dazu benutzen, den Widerstand der gleitenden Reibung graphisch zum Ausdrucke zu bringen, indem man die folgende Regel festhält:

Wenn zwei Körper mit gewissen ebenen Flächen sich gegen einander stützen, längs denen sie eine relative Bewegung gegen einander erleiden, so kann man jede dieser Stützebenen vollkommen durch eine Reaction ersetzen, welche gegen die Normale unter dem Reibungswinkel geneigt ist und zwar in solcher Art, dass die bei rechtwinkliger Zerlegung dieser Reaktionskraft in die Bewegungsrichtung fallende Componente im Sinne der angestrebten relativen Bewegung des stützenden Körpers gegen den gestützten wirksam ist.

Die Nothwendigkeit und Richtigkeit des letzten Theiles dieses Gesetzes erkennt man leicht aus der Figur. Wird z. B. der gestützte Körper A durch die Kraft P in der Richtung von A nach C hin bewegt, so ist die relative Verschiebung der Unterlage GG gegen den Körper A offenbar durch die entgegengesetzte Richtung CA gegeben, und diejenige Reaction R , durch welche man die feste Fläche GG ersetzt denken kann, hat nach dem Vorstehenden die Richtung von E nach A , derart, dass die gedachte Componente CA dieser Reaction im Sinne der relativen Verschiebung wirkt, welche die Fläche GG in Bezug auf den gestützten Körper A anzunehmen strebt.

Vermöge dieses allgemein gültigen Gesetzes erhält man in jedem Falle in einfacher Art die Grösse der gleitenden Reibung zwischen zwei Körpern, welche einer Verschiebung gegen einander ausgesetzt sind. Wollte man z. B. bei dem Kurbelgetriebe, Fig. 2, Taf. I, den Einfluss der Reibung ermitteln, welche zwischen dem Gleitstücke D des Kreuzkopfes und der Führungsschiene stattfindet, so hätte man nur nöthig, die Richtung der durch A gehenden Reaction R_1 der Führungsschiene anstatt nach der Normale EA zu D_1D_2 in der Geraden E_1A anzunehmen, so dass $E_1AE = \varphi$ ist. Zieht man daher durch F die Gerade FG_1 parallel E_1A , so findet man in AG_1 die wirkliche Stangenkraft T , während früher in $AG = T_0$ die ohne Reibung in der Stange erzeugte Kraft ermittelt wurde. Durch die gleitende Reibung des Kreuzkopfes D ist daher die Schubstangenkraft um die Grösse G_1G verringert worden, und man kann den Werth $\frac{AG_1}{AG} = \frac{T}{T_0} = \eta$ als den Wirkungsgrad der Geradföhrung für die betrachtete Kurbel-

Fig. 2, Taf. I.

stellung ansehen. Es bedarf keiner näheren Erläuterung, dass hierbei die gleitende Reibung und damit auch der Wirkungsgrad in verschiedenen Stellungen veränderliche Werthe annimmt.

Die Benutzung des Reibungswinkels in der hier besprochenen Weise gestattet für eine grosse Anzahl von Maschinengetrieben in einfacher Art die Ermittlung des Wirkungsgrades, wie an einigen Beispielen gezeigt werden soll. Es sei ABC , Fig. 4, Taf. I, die Zahnstange einer gewöhnlichen Wagenwinde, auf deren Klaue bei A die Last $Io_1 = Q$ vertical abwärts wirkt, während an dem Theilriss DD der Zahnstange die Kraft P vertical aufwärts angreift. In Folge der einseitigen Wirkung von Q wird die Zahnstange bei B und C gegen das Gehäuse gedrückt, und mögen in den Mitten b und c der Stützflächen die von diesen auf die Zahnstange ausgeübten Reactionen R_1 und R_2 angreifend gedacht werden. Es müssen nun die vier Kräfte Q , P , R_1 und R_2 im Gleichgewichte sein, was nur möglich ist, wenn die Mittelkraft von je zweien derselben gleich und in derselben Geraden entgegengesetzt ist der Mittelkraft der beiden anderen. Ist daher o_1 der Durchschnitt von Q und R_1 und o_2 derjenige von P und R_2 , so ist in der Geraden o_1o_2 die Richtung und Lage der Mittelkraft sowohl von Q und R_1 als von P

Fig. 4, Taf. I.

und R_2 gegeben. Man erhält daher aus der gegebenen Belastung Q die Kräfte P , R_1 und R_2 durch Verzeichnung des Kräftepolygons, wenn man $Io_1 = Q$ macht, $I II$ parallel mit R_1 bis zu $o_1 o_2$ zieht und über der Mittelkraft IIo_1 von R_1 und Q das Dreieck $IIo_1 III$ entwirft, dessen Seiten $o_1 III$ parallel zu R_2 und $IIII$ parallel zu P sind. Man erhält dann in $IIII$ die zur Hebung von Q an der Zahnstange anzubringende Kraft P . Ohne Reibungswiderstände wäre natürlich $P_0 = Q$, und man hat daher den Wirkungsgrad des betrachteten Getriebes zu $\eta = \frac{P_0}{P}$ gefunden. Der Figur ist ein Reibungscoefficient $\mu = 0,2$, also ein Reibungswinkel $\varphi = 11^\circ 20'$ zu Grunde gelegt und folgt demgemäss für:

$$Q = P_0 = 100; P = 122,3, \text{ also } \eta = \frac{100}{122,3} = 0,817.$$

Hierbei ist zu bemerken, dass die hier und in der Folge angeführten numerischen Resultate nicht den lithographirten Tafeln, sondern den Originalentwürfen entnommen sind, welche in drei bis vier Mal grösserem Maassstabe von dem Verfasser gezeichnet wurden. Bei der Eintragung der Reactionsrichtungen ist es übrigens nicht erforderlich, den Reibungswinkel φ in Bogengraden und Minuten zu kennen, es genügt vielmehr in allen Fällen die Kenntniss des Reibungscoefficienten, und es empfiehlt sich mit Rücksicht auf Einfachheit sowohl wie auf Genauigkeit der Zeichnung, aus dem Reibungscoefficienten oder der trigonometrischen Tangente des Reibungswinkels letzteren durch die geometrische Construction direct zu finden, ohne ihn zuvor aus den trigonometrischen Tafeln zu entnehmen. Der hier gefundene Wirkungsgrad η bezieht sich natürlich nur auf das betrachtete Getriebe der Windenstange mit ihren Führungen, um den Wirkungsgrad der ganzen Winde zu bestimmen, hat man nach den in dem Folgenden anzugebenden Regeln auch die Reibungswiderstände zwischen den Zähnen und in den Lagern der Triebwellen etc. zu ermitteln.

Für den Fall der rückgängigen Bewegung der Winde, d. h. wenn die Last Q die Bewegung hervorruft, gilt dieselbe Construction mit der Maassnahme, dass hierbei die Reactionen (R_1) und (R_2) um den Winkel φ nach den entgegengesetzten Seiten von den Normalen abweichen, und man erhält durch das in der Figur durch Punkte und Striche angedeutete Kräftepolygon $I23o_1$, dessen Diagonale $2o_1$ parallel zu (o_1) (o_2) ist, in 32 die Grösse der etwa durch Bremsen an der Zahnstange auszuübenden Widerstandskraft (P), welche eine beschleunigte Senkung der Last Q zu hindern vermag. Für denselben Werth von $\mu = 0,2$ findet sich hierdurch:

$$(P) = 79,1, \text{ daher } (\eta) = \frac{(P)}{P_0} = 0,791.$$

Es kann hierbei bemerkt werden, dass die Durchgangspunkte b und c , in welchen die Stützflächen der Stange von den zugehörigen Reactionen R_1 und R_2 getroffen werden, aus dem geometrischen Zusammenhange des Getriebes nicht unzweifelhaft hervorgehen, und es musste deshalb von vornherein die Annahme gemacht werden, dass diese Kräfte in den Mitten der Stützflächen ihre Angriffspunkte haben mögen. In dem früher betrachteten Falle der Kreuzkopfbewegung der Fig. 2 war eine solche Unbestimmtheit dadurch ausgeschlossen, dass die Reaction R_1 der Geradföhrung behufs des Gleichgewichts durch den Durchschnitt der Kolbenkraft P mit der Stangenkraft T gehen muss. In dem vorliegenden Falle der Figur 4 indessen ist das Gleichgewicht auch möglich, wenn die Reactionen R_1 und R_2 nicht gerade durch die Mitten b und c der Stützflächen, sondern durch beliebige andere Punkte derselben gehen. Mit

der Wahl anderer Lagen von b und c werden dann auch die Grössen von R_1 und R_2 etwas anders werden, und es ist leicht einzusehen, dass R_1 und R_2 und daher auch die Reibungen die möglich kleinsten Werthe annehmen, wenn die verticale Entfernung der Angriffspunkte b und c die möglich grösste ist. Wären die Führungsflächen absolut genaue Ebenen, und wären die Materialien einer Veränderung durch Verschleissen nicht ausgesetzt, so würde es gerechtfertigt sein, als Angriffspunkte für R_1 und R_2 die äussersten Kanten b_1 und c_1 anzunehmen. Unter dieser Voraussetzung würden die Reibungswiderstände den relativ kleinsten Werth annehmen, und es würde diese Wahl der Punkte der so vielfach in der Wirklichkeit bewährten Erfahrung entsprechen, wonach die Natur sich stets den kleinsten Widerstand aussucht. Da indessen die äussersten Kanten wegen des grossen in ihnen concentrirten Druckes gar bald durch die Abnutzung einer Abrundung ausgesetzt sein werden, so dürfte die hier gemachte Annahme, wonach die Reactionen in den Mitten der Berührungsflächen wirken, dem thatsächlichen Zustande am besten entsprechen und die Construction die genügende Sicherheit gewähren.

In derselben Art bestimmt sich bei dem Fahrstuhle, Fig. 5, Taf. I, wie er in Mahlmühlen gebräuchlich ist, die an dem bei D angeknüpften Riemen erforderliche Kraft, welche zum Aufziehen des Stuhls aufzuwenden ist. Auch hier wird der Stuhl durch die Belastung und durch sein Eigengewicht, deren gemeinschaftlicher Schwerpunkt in A liegen möge, mit den beiden Gleitbacken B und C gegen die Führung EE gepresst, welche durch die beiden unter dem Winkel φ gegen die Horizontale gerichteten Reactionen R_1 und R_2 ersetzt gedacht werden kann. Nimmt man auch hier die Angriffspunkte dieser Reactionen in den Mitten b und c der Gleitflächen an, so bestimmt sich in der Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte o_1 von Q und R_1 und o_2 von P und R_2 die Lage der Resultirenden dieser beiden Paare von Kräften. Wird daher wieder Io_1 gleich der totalen Belastung gemacht und III parallel zu R_1 , ferner $o_1 III$ parallel mit R_2 und durch II die Verticale $II III$ gezogen, so findet man in der letzteren die erforderliche Zugkraft P , während $II I$ und $o_1 III$ die Reactionen R_1 und R_2 darstellen. Gleichzeitig hat man in der Diagonale $o_1 II$ die Kraft Z , welche den Stuhl auf Zug in Anspruch nimmt. Für den Niedergang durch das eigene Gewicht findet man ebenso in dem Diagramm $I 2 3 o_1$ die Grösse der anzuwendenden Bremskraft (P) in der Strecke 3 2. Bei den der Zeichnung zu Grunde liegenden Verhältnissen ergibt sich für den Reibungscoefficienten $\mu = 0,16$ für

$$Q = P_0 = 100; \quad P = 105,9, \text{ daher } \eta = \frac{100}{105,9} = 0,944$$

$$\text{und } (P) = 93,5, \text{ daher } (\eta) = \frac{93,5}{100} = 0,935.$$

Man erkennt aus der Figur leicht, dass die Reibung um so kleiner, der Wirkungsgrad daher um so grösser ausfällt, je kleiner der horizontale Abstand der beiden Kräfte Q und P ist, und je grösser die Entfernung der Gleitbacken B und C gewählt wird. Es empfiehlt sich daher, die Höhe BC der Rückwand nicht zu klein zu wählen, und durch Kröpfung der Oehse D des Riemens die Richtung der Kraft P thunlichst der Schwerlinie Ao_1 des Stuhles zu nähern. Aus gleichem Grunde wird es gerathen sein, beim Heben die Last möglichst der Rückwand BC zu nähern, wogegen das Bremsen beim Niederlassen um so leichter zu bewirken ist, je weiter die Last Q von der Rücklehne BC entfernt ist.

Welchen erheblichen Einfluss das Verhältniss des Abstandes der beiden Kräfte P und Q zu der Entfernung der führenden Flächen B und C auf die verhältnissmässige Grösse von P und Q ausübt, kann man am deutlichsten an der einfachen Klemmvorrichtung, Fig. 6, Taf. I, Fig. 6, Taf. I.

erkennen, wie solche häufig in Schneidemühlen zum Befestigen des Blockes auf dem Blockwagen angewendet wird. Diese Einrichtung ermöglicht eine sehr haltbare Befestigung des Sägeblockes K auf dem Wagen oder Tische T einfach dadurch, dass die schmiedeeiserne Klammer AB , welche auf dem mit dem Tische fest verbundenen Ständer DE lose verschiebbar ist, auf den Block niedergelegt wird. Denkt man sich nämlich, dass auf den Block K durch irgend welche Ursache, etwa durch die Wirkung der aufsteigenden Säge, eine vertical aufwärts gerichtete Kraft Q einwirke, welche das Bestreben hat, die Klammer AB auf dem cylindrischen Ständer DE nach oben zu verschieben, so wird zunächst die Klammer wegen der einseitigen Wirkung von Q eine sehr geringe Drehung annehmen, in Folge deren das Auge B des Klobens mit den äusseren Kanten bei b und c fest gegen den Ständer gepresst wird. Letzterer reagirt daher in diesen Punkten gegen den Kloben mit Kräften R_1 und R_2 , welche unter der Voraussetzung einer wirklich stattfindenden Verschiebung der Hülse nach oben unter dem Reibungswinkel φ gegen die Horizontale gerichtet sein müssen, so zwar, dass diese Kräfte der Verschiebung der Hülse entgegenwirken. Diese beiden Kräfte, welche sich in o schneiden, haben daher die Richtungen R_1 von b nach o und R_2 von o nach c ; ihre Mittelkraft geht durch den Schnittpunkt o . Sollen diese Reactionen R_1 und R_2 nun mit der Kraft Q im Gleichgewichte sein, was unter der gemachten Voraussetzung einer wirklich beginnenden Bewegung der Fall sein muss, so ist dazu erforderlich, dass der Punkt o in die Richtung der Kraft Q hineinfällt. Wenn man daher von einem Punkte A der Krafrichtung Q die beiden Geraden Ab' und Ac' parallel zu den Richtungen der Reactionen R_1 und R_2 zieht, so erhält man in b' und c' die Angriffspunkte, in welchen diese Reactionen angreifen müssten, wenn die besagte Bedingung der Bewegung erfüllt sein sollte, d. h. die Hülse des Klobens müsste eine Länge gleich dem verticalen Abstände zwischen b' und c' haben, wie durch die Punktirung angedeutet ist. In diesem Falle würde jede Kraft Q , auch die kleinste, ein Lösen der Verbindung zur Folge haben.

Wenn jedoch, wie in der Figur angenommen, das Auge der Klammer eine geringere Höhe hat, der zufolge der Durchschnittspunkt o der Reactionen zwischen den Ständer und die Krafrichtung von Q fällt, so kann die Klammer AB nur in Bewegung kommen, wenn zu den drei Kräften R_1 , R_2 und Q noch eine vierte Kraft P hinzutritt, derart, dass die Resultirende von P und Q ebenfalls durch den Schnittpunkt o von R_1 und R_2 hindurchgeht. Eine solche Kraft P lässt sich natürlich in unendlich mannichfacher Art angeben. Nimmt man etwa diese Kraft P parallel mit Q , also vertical gerichtet an und setzt voraus, dass sie in der Axe des Ständers oder der Hülse wirke, so ist sie leicht zu bestimmen. Da nämlich P und Q eine Mittelkraft haben sollen, welche durch o geht, also nach einem bekannten Grundgesetze für parallele Kräfte $P \cdot Bo = Q \cdot Ao$ sein muss, so findet sich P in JB , wenn man $BF = AG = Q$ macht, durch F und o bis zum Durchschnitt H mit der Kraft Q zieht und JB gleich HA macht, denn man hat bei dieser Construction:

$$JB : AG = Ao : Bo \text{ oder } P \cdot Bo = Q \cdot Ao.$$

Diese Kraft P ist offenbar mit Q von gleicher Richtung, so lange der Durchgangspunkt o für die Mittelkraft beider zwischen diesen liegt, und es geht daraus hervor, dass in solchem Falle irgend welche auch noch so grosse Kraft Q nicht im Stande sein kann, die Klammer zu lösen, dass vielmehr zu diesem Zwecke noch eine besondere, im Sinne von Q wirkende Kraft P zu Hülfe genommen werden muss. Dass übrigens die Klammer durch die geringste bei B angreifende Kraft allein, wenn sie nur das Gewicht der Klammer übertrifft,

aufgehoben werden kann, ist von selbst klar. Zur Befestigung des Blockes genügt nur ein festes Auflegen oder Auftreiben der Klammer durch einen leichten Schlag.

Derartige Getriebe, deren Wirkungsgrad nach dem Früheren als negative Grösse angesehen werden muss, finden in der Praxis vielfache Anwendung in solchen Fällen, wo es sich um Verhinderung einer nicht beabsichtigten Bewegung durch Klemmwirkung handelt. So beruht die einfache und sichere Wirkung des bekannten Bankhakens der Hobelbank lediglich auf diesem Princip, welches auch bei gewissen Reibungsschaltwerken zur Wirkung kommt.

Eine wichtige Rolle spielt die gleitende Reibung insbesondere bei dem Keile, dessen Wirkungsgrad dadurch meist sehr erheblich herabgezogen und um so kleiner wird, je schlanker der Keil, d. h. je spitzer der Keilwinkel ist. Als ein Beispiel möge die Keilstellvorrichtung für das Spurlager einer stehenden Welle W , Fig. 7, Taf. I, gewählt werden. Das die Welle W tragende Spurlager L ruht hierbei unterhalb auf dem schmiedeeisernen Keile K , während es an seitlichem Ausweichen durch die Führung in dem Spurkasten N gehindert wird. Durch die Belastung $Q = IA$ der Welle werden daher zwei Reactionen R_1 des Keils und R_2 des Spurkastens gegen den Napf L hervorgerufen, und diese drei Kräfte müssen im Gleichgewichte sein. Von den beiden Reactionen R_1 und R_2 kennt man von vornherein nur die Richtungen, welche wieder um den Reibungswinkel φ von den Normalen der Druckflächen abweichen müssen, nicht aber ihre Angriffspunkte. Nimmt man etwa an, dass die Reaction R_1 des Keils gegen das Lager in demjenigen Punkte A wirke, in welchem die Berührungsfläche von der Last Q getroffen wird, so muss auch die Reaction R_2 des Spurkastens durch diesen Punkt hindurchgehen. Für das Resultat ist es übrigens in dem vorliegenden Falle, wie sich aus der Construction ergeben wird, gleichgültig, wo die Angriffspunkte A und C von R_1 und R_2 angenommen werden. Wollte man z. B. die Reaction R_1 in a annehmen, so würde diejenige von R_2 in die Linie cb fallen, welche durch den Schnittpunkt b von Q und R_1 hindurchgeht. Die Grössen dieser Reactionen sind in dem einen wie in dem anderen Falle aus dem Kräftepolygon durch $AII = R_1$ und $III = R_2$ gegeben, vorausgesetzt, dass IA gleich Q gemacht ist, und die Polygonseiten den betreffenden Kräften parallel gezogen werden.

Fig. 7, Taf. I.

Wirkt nun auf den Keil K etwa mittelst der Schraubenspindel S eine horizontale Zugkraft P , so muss für den Fall der Bewegung der Keil im Gleichgewichte sein unter Einfluss dieser Kraft P , des von dem Spurlager auf den Keil ausgeübten Gegendruckes — R_1 und der von der festen Unterlage H gegen den Keil geübten Reaction R_3 . Die Lage der letzteren Kraft R_3 ist dadurch unzweifelhaft festgelegt, dass diese Kraft durch den Schnittpunkt o von R_1 und P gehen muss. Zur Bestimmung von P hat man daher nur das Kräftepolygon zu vervollständigen, indem man über IIA oder — R_1 das Dreieck $IIIIA$ zeichnet, in welchem die mit P parallele Seite $AIII$ die Grösse der aufzuwendenden Zugkraft P vorstellt, während in $IIII$ der Richtung und Grösse nach die von der Grundplatte H gegen den Keil in D ausgeübte Reaction sich ergibt. Um die theoretische Kraft P_0 zu finden, hat man nur nöthig, die Richtung von R_1 in AII_0 senkrecht zur Keilfläche und diejenige von R_2 in III_0 senkrecht zur Axe anzunehmen. Zeichnet man dann über II_0A das Dreieck II_0III_0A , dessen Seiten parallel mit P und senkrecht zu HH sind, so erhält man in $AIII_0$ die Kraft P_0 , welche ohne das Vorhandensein von Nebenhindernissen zum Heben des Lagers erforderlich wäre. Ebenso findet man die Verhältnisse für den etwaigen Rückgang des Keils durch das Kräftepolygon $I23A$, worin $A2$ von der Normale AII_0 zur Keilfläche nach der entgegengesetzten Seite um den Winkel $2AII_0 = \varphi$ abweicht. Auch wird jetzt die von dem Spurkasten auszuübende Reaction (R_2), welche Q und (R_1) das Gleichgewicht

hält, von der entgegengesetzten Seite des Spurkastens herrühren, und es muss diese Kraft die Richtung von (C) nach A haben. Ferner ergibt sich die Lage der Reaction (R_3) der Grundplatte H mit Rücksicht darauf, dass diese Kraft durch den nunmehrigen Schnittpunkt (o) der Kraft P mit der Reaction (R_1) gehen muss. Vervollständigt man auch für den Rückgang das Kräftepolygon, indem man $A3$ parallel zu P und 23 parallel zu (R_3) zieht, so ergibt sich in $A3$ die zur Bewegung des Keils erforderliche Kraft (P) . Da diese Kraft von A nach 3 gerichtet ist, also in demselben Sinne wirkt, in welchem auch die Last Q den Keil zu verschieben strebt, so wird ein Rückgang des Keils von selbst, d. h. durch die Last Q nicht erfolgen können, und man hat daher für den Rückgang den Wirkungsgrad $(\eta) = \frac{(P)}{P_0}$ als negativ anzusehen. Mit dem Werthe $\mu = 0,16$ ergibt sich aus der Zeichnung für eine Neigung des Keiles gleich $\frac{1}{9}$ für:

$$Q = 100; P_0 = 11,1, P = 45, \text{ also } \eta = \frac{11,1}{45} = 0,247$$

$$\text{und } (P) = -19,8, \text{ daher } (\eta) = -\frac{19,8}{11,1} = -1,78.$$

Um Wiederholungen zu vermeiden, sei hierbei bemerkt, dass in den Tafeln wie in Fig. 7 die für den Vorwärtsgang bezüglichen Druckrichtungen und Kräftepolygone durch ausgezogene Linien dargestellt sind, während die abwechselnd aus Punkten und Strichen $\cdot - \cdot - \cdot -$ zusammengesetzten Linien dem Rückgange entsprechen, für welchen die Bezeichnungen in Klammern gesetzt sind. Das Kräftepolygon für die theoretische Kraft P_0 ist immer durch abgerissene $- - - -$, die etwaigen Hilfsconstructionen sind durch punktirte Linien $\dots\dots$ dargestellt.

Fig. 8, Taf. I. Auf die gleitende Reibung lässt sich auch der Widerstand zurückführen, welchen ein Spurzapfen an seiner ebenen Grundfläche FF , Fig. 8, Taf. I, erleidet. Man kann bekanntlich die in den einzelnen Punkten der Berührungsfläche FF auftretenden elementaren Reibungen, deren Wege mit den Abständen vom Mittelpunkte A proportional sind, in einer Kreislinie $A_1 A_2$ vereinigt denken, deren Halbmesser $AA_1 = \frac{2}{3}r$ ist, wenn r den Zapfenhalbmesser AF bedeutet. Stellt man sich etwa vor, die Zapfenbelastung Q sei durch zwei gleiche Kräfte $CA = \frac{1}{2}Q$ ersetzt, welche in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten A_1 und A_2 jener gedachten Kreislinie wirksam sind, so hat man sich in diesen Punkten A_1 und A_2 die Reaction des Spurlagers durch zwei Kräfte R_1 und R_2 ersetzt zu denken, welche um den Reibungswinkel φ gegen die Axe AC geneigt sind, und welche in Ebenen liegen senkrecht zu der Ebene der Kräfte $\frac{Q}{2}$ in A_1 und A_2 . Die horizontalen Projectionen $A_1 E_1$ und $A_2 D_1$ stellen sonach die in A_1 und A_2 concentrirt gedachten Widerstände der Spurzapfenreibung dar, zu deren Ueberwindung also ein gleiches und entgegengesetzt drehendes Kräftepaar mit der Kraft $E_1 A_1 = D_1 A_2 = P$ an dem Hebelarme $A_1 A_2$ anzubringen ist. Wenn, wie es in der Wirklichkeit fast immer der Fall ist, die treibende Kraft P nur an einer Stelle angreift, so wird in Folge von deren einseitiger Wirkung der Zapfen auch mit seiner Mantelfläche in die ihn umschliessende Lagerbüchse gedrückt, wodurch ausser der hier betrachteten Spurzapfenreibung noch eine gewisse Halsreibung hervorgerufen wird. Die Bestimmung des letztgedachten Widerstandes wird aus dem in der Folge über die Zapfenreibung Gesagten ersichtlich werden.

In ähnlicher Art bestimmt sich die Reibung an den Gewinden der Schrauben. Ist Fig. 9, Taf. I. z. B. SS , Fig. 9, Taf. I, eine mit rechten und linken Gewinden versehene Schraubenspindel, wie

sie bei den bekannten Kuppelungen der Eisenbahnwagen vorkommt, und wird jede der beiden Muttern M_1 und M_2 durch die Zughaken der Wagen mit einer Kraft $Q = AB$ nach aussen gezogen, so findet man die an dem Hebel N zum Umdrehen der Spindel erforderliche Kraft in folgender Weise. Denkt man sich auch hier die Wirkung jeder Mutter auf die Spindel in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten eines mittleren Gewindeganges vereinigt, dessen Durchmesser d gleich dem arithmetischen Mittel $\frac{d_1 + d_2}{2}$ zwischen dem inneren und äusseren Gewindedurchmesser angenommen werden kann, und seien A und C die beiden nach vorn gelegenen Punkte, in denen die Richtung der Schraubenlinie resp. durch Aa und Cc dargestellt sein möge, so erhält man in den von den Normalen AO_0 und CO_0 um den Reibungswinkel φ abweichenden Geraden AO und CO die Reactionsrichtungen in A und C . Trägt man daher von dem Durchschnitte O der beiden Reactionen in der Axenrichtung der Spindel $OJ = \frac{1}{2} Q$ auf, und legt durch J eine Senkrechte zu OJ , so erhält man in der Strecke KL derselben zwischen den Reactionsrichtungen die Kraft P , welche mit den beiden Reactionen LO der Mutter M_1 in A und OK der Mutter M_2 in C im Gleichgewichte ist. Da dieselbe Construction auch für die beiden anderen A und C diametral gegenüberliegenden Punkte gilt, so ergibt sich, dass zur Umdrehung der Schraubenspindel ein Kräftepaar angebracht werden muss, dessen Kraft durch $P = KL$ und dessen Arm durch den Durchmesser d der mittleren Schraubenlinien dargestellt ist, in welchen die Wirkungen der Muttern auf die Spindel concentrirt gedacht wurden. Ohne Reibungen würde man $P_0 = K_0 L_0$ erhalten, wenn die Reactionen in den Normalen O_0A und O_0C angenommen werden. Die Figur ergibt für einen Reibungscoefficienten $\mu = 0,1$ und ein Steigungsverhältniss der mittleren Schraubenlinien $n = \frac{1}{12}$ für

$$\frac{1}{2} Q = 100; P = 37,8, P_0 = 16,67, \text{ also } \eta = \frac{P_0}{P} = 0,441.$$

Die Construction bleibt dieselbe, wenn die Steigungen der beiden Schrauben, wie bei der Differentialschraube, verschieden sind; oder wenn die Steigung der einen Schraube zu Null wird, wie es bei der vielfach angewandten Spannvorrichtung, Fig. 10, Taf. I, der Fall ist, wo das Gewinde der einen Stange S_1 in einen Bundring F übergeht, an welchem einfache Spurzapfenreibung stattfindet. Macht man auch hier $OJ = \frac{1}{2} Q$, so erhält man in KL wieder die Kraft des zur Drehung der Spannhülse M erforderlichen Kräftepaars, wobei vorausgesetzt ist, dass die Richtung OK um den Reibungswinkel φ gegen die Axe der Stange S_1 geneigt ist. Ohne Reibungen würde man die Kraft P_0 in JL_0 erhalten. Die Construction ergibt für ein mittleres Steigungsverhältniss der Schraube S von $n = \frac{1}{12}$ und den Reibungscoefficienten $\mu = 0,1$ für

$$\frac{1}{2} Q = 100; P = 28,9, P_0 = 8,33, \text{ daher } \eta = \frac{P_0}{P} = 0,288.$$

Auch bei den in Fig. 9 und 10, Taf. I, skizzirten Getrieben veranlasst die in der Regel einseitige Wirkung der drehenden Kraft gewisse Halsreibungen an den Umfängen der Spindeln, welche, wie aus dem Folgenden sich ergibt, zu bestimmen sind.

§. 4.

Die Zapfenreibung.

Fig. 11, Taf. I.

Wenn ein cylindrischer Zapfen von einer senkrecht zu seiner geometrischen Axe A , gerichteten Kraft $DE = Q$ in sein Lager A_1 gedrückt wird, so reagirt dieses Lager wie jede Stützfläche mit einer Q genau gleichen und entgegengesetzten Kraft ED in D wieder auf den Zapfen. Wenn nun dem Zapfen im Sinne des Pfeils eine Drehung ertheilt werden soll, so ist dazu eine gewisse, nicht durch die Axe hindurchgehende Kraft erforderlich. Es möge BG eine solche in B angreifende Kraft von solcher Grösse P sein, dass sie gerade noch genügt, den Zapfen im Gleichgewichte zu erhalten, während die geringste Vergrößerung derselben eine Drehung hervorruft. Der Zapfen befindet sich unter dieser Voraussetzung im Gleichgewichte unter Einfluss der beiden Kräfte Q und P und der von dem Zapfenlager auf ihn ausgeübten Reaction R . Man findet daher diese Reaction, wenn man Q und P zu ihrer Mittelkraft OJ vereinigt, in JO der Richtung und Grösse sowie der Lage nach angegeben. Das Lager A_1 wird daher den Zapfen in dem Punkte K mit der Kraft $LK = JO$ ergreifen, wobei man sich nicht gerade vorzustellen braucht, dass die Reaction lediglich von dem Punkte K ausgehe, sondern wobei man anzunehmen hat, dass K derjenige Punkt der Zapfenoberfläche ist, durch welchen die Resultirende aller von den einzelnen Elementen des Lagers auf den Zapfen ausgeübten Wirkungen hindurchgeht. Als das der Drehung des Zapfens durch das Lager dargebotene Hinderniss der Bewegung hat man nun eine Reibung in dem Punkte K anzunehmen, welche nach dem allgemeinen Reibungsgesetze in der Richtung der Bewegung gemessen, eine Grösse μN hat, unter N den normalen Druck in K und unter μ den Reibungscoefficienten verstanden. Zerlegt man daher die gefundene Reaction LK in die beiden zu einander senkrechten Componenten normal und tangential zu der Berührungsfläche in K , so findet man in der radialen Componente SK den Normaldruck und in der tangentialen LS den Reibungswiderstand am Zapfenumfang. Da nun $\frac{LS}{SK} = \mu = \tan \varphi$, so findet man, dass der Winkel LKS oder OKA , welchen die Reaction mit dem an ihren Angriffspunkt gezogenen Radius bildet, gleich dem Reibungswinkel φ der beiden Materialien vom Zapfen und Lager sein muss. Fällt man vom Mittelpunkt A das Loth AT auf die Richtung der Reaction KO , so ist dieses Loth oder der Arm der Reaction in Bezug auf den Mittelpunkt durch

$$AT = q = r \sin \varphi$$

gegeben, wenn der Zapfenhalbmesser mit r bezeichnet wird. Man wird für diesen Arm AT immer dasselbe Resultat erhalten, wo man die auf Drehung wirkende Kraft P auch annehmen möge, und wenn man nach einander der Kraft P durch Herumführung um die Axe A alle möglichen Lagen ertheilt denkt, so wird die Lagerreaction in jedem Falle einen um den Punkt A als Mittelpunkt beschriebenen Kreis von dem Halbmesser $AT = q = r \sin \varphi$ berühren.

Man kann sich daher das Zapfenlager in seiner Wirkung auf den Zapfen vollständig ersetzt denken durch eine Reaction, welche den gedachten um A beschriebenen Kreis zum Halbmesser $r \sin \varphi$ berührt, und man kennt die Richtung und Lage dieser Reaction R , sobald man noch ein zweites Element für dieselbe angeben kann, wie z. B. in dem vorliegenden Falle den Punkt O , durch welchen die Reaction hindurchgehen muss. Dieser Kreis vom Halbmesser $\varrho = r \sin \varphi$, welcher der Kürze halber in der Folge nach Analogie der Benennungen Reibungswinkel, Reibungskegel etc. als Reibungskreis bezeichnet werden möge, gewährt demnach ein bequemes Mittel, um bei graphischen Ermittlungen den Einfluss der Zapfenreibung zum Ausdrucke zu bringen. Während nämlich unter der Voraussetzung einer gänzlich reibungslosen Bewegung die Reaction eines Zapfenlagers immer durch die Zapfenmitte gehend zu denken ist, hat man dieselbe behufs Berücksichtigung der Zapfenreibung tangential an den Reibungskreis zu legen.

Es ist aus der Figur auch ersichtlich, dass die zweite von O an den Reibungskreis gelegte, in der Figur punktirte Tangente OW einer Drehung des Zapfens in der dem Pfeile entgegengesetzten Richtung entspricht, und dass in diesem Falle, in welchem die umdrehende Kraft etwa in der Richtung OB_1 wirkt, der Angriffspunkt für die Reaction des Lagers gegen den Zapfen in W anzunehmen ist. Man kann sich diese Angriffspunkte K oder W gewissermaassen als die Stützpunkte des Zapfens vorstellen.

Nimmt man ferner an, dass der Zapfen A unwandelbar befestigt sei, und dass das Lager A_1 etwa wie die Nabe eines lose auf die Axe gesteckten Rades durch die Kräfte P und Q angegriffen werde, so hat man alsdann einen der Punkte K_1 oder W_1 als den Stützpunkt anzusehen, in welchem die Nabe von der festen Axe unterstützt wird, und zwar wird der Punkt K_1 einer Linksdrehung des Lagers im Sinne des Pfeils und der Punkt W_1 der entgegengesetzten Richtung entsprechen. Die Richtung und Grösse der Reaction R kann durch diese letztgedachte Ausführungsart nicht geändert werden, da es sich hierbei lediglich um die Verlegung des Angriffspunktes einer Kraft in ihrer Richtung nämlich von K nach K_1 beziehungsweise von W nach W_1 handelt.

Denkt man dagegen die auf den Zapfen wirkenden Kräfte Q und P und damit auch deren Mittelkraft nach entgegengesetzten Richtungen OF' , OH' und OJ' wirkend, so wird der Stützpunkt des Zapfens nach K_1 fallen, während der Zapfen nunmehr in der dem Pfeile entgegengesetzten, also rechtsgängigen¹⁾ Richtung gedreht wird. Man hat daher in jedem einzelnen Falle zu prüfen, welche der beiden Tangenten als die Richtungslinie der betreffenden Lagerreaction anzusehen ist. Diese Prüfung erleichtert man sich sehr, wenn man ebenso wie bei der gleitenden Reibung im Auge behält, dass jeder der beiden Theile, Zapfen wie Lager, gegen den anderen eine solche Wirkung ausübt, wie sie im Sinne der relativen Bewegung dieses Theils gegen den anderen günstig wirkt. Wenn dabei auch beide Theile, Zapfen wie Lager, gleichzeitig absoluten Bewegungen ausgesetzt sind, wie dies in der Praxis so häufig z. B. bei allen Gelenkführungen stattfindet, so wird sich doch in jedem Falle die relative Bewegung des einen Theils gegen den anderen unschwer erkennen lassen. Die späteren Bemerkungen werden hierfür zur Erläuterung dienen.

¹⁾ Im Allgemeinen soll hier und in der Folge unter rechtsgängiger Bewegung eine im Sinne der Uhrzeiger erfolgende verstanden werden.

Fig. 12, Taf. I. Um den Reibungskreis eines Zapfens graphisch zu bestimmen, hat man nur an einen beliebigen Radius AB des Zapfens, Fig. 12, Taf. I, den Reibungswinkel $\varphi = CAB$ anzutragen, wozu man, wenn dieser Winkel nicht direct, sondern nur der Reibungscoefficient μ gegeben ist, BC senkrecht zu AB und gleich $\mu \cdot AB$ zu machen hat. Zieht man dann durch den Schnittpunkt D des Schenkels AC mit der Zapfenbegrenzung DE parallel zu AB , so erhält man in dem diese Parallele berührenden Kreise um A den Reibungskreis vom Halbmesser $AE = \rho = r \sin \varphi$.

Fig. 13, Taf. I. In den Maschinengetrieben werden sehr häufig Stangen oder stangenförmige Körper verwendet, welche an zwei Stellen mit Zapfen oder Augen behaftet sind, mittelst deren sie mit anderen festen oder beweglichen Maschinentheilen gelenkartig verbunden sind. Eine solche Stange AB , Fig. 13, Taf. I, würde beim Nichtvorhandensein von Reibungswiderständen von Zapfen zu Zapfen nur Kräfte übertragen können, welche in die gerade Verbindungslinie der Zapfenmitten AB hineinfallen, denn eine jede auf den einen Zapfen z. B. AC ausgeübte Kraft würde in dem anderen Zapfen BD eine Gegenwirkung hervorrufen, mit welcher sie im Gleichgewichte wäre. Da nun beim Wegfall der Reibung die Uebertragung zwischen Zapfen und Stange nur normal zu der Berührungsfläche stattfinden kann, so müssten diese beiden gleichen und entgegengesetzten Kräfte nothwendig durch die Mittelpunkte A und B gehen. Dies wird auch in der That in allen solchen Fällen geschehen, wo eine relative Bewegung der Zapfen gegen ihre Lager nicht eintritt, wie dies z. B. bei den Gliedern einer Gelenkkette der Fall ist, welche, unterhalb durch ein Gewicht belastet, in genau verticaler Richtung emporgehoben wird. Wenn dagegen bei der betreffenden Bewegung relative Drehungen der Zapfen in den Lagern stattfinden, so treten daselbst auch Zapfenreibungen ein, und dann kann nach dem Vorstehenden eine Uebertragung von Kräften zwischen dem Zapfen und seinem Auge nur in Richtungen geschehen, welche den Reibungskreis des Zapfens berühren. Demgemäss wird in dem vorliegenden Falle eine Uebertragung von Kräften zwischen den Zapfen AC und BD nur in einer der vier Tangenten möglich sein, welche die beiden Reibungskreise AE und BF berühren. Welche von den vier möglichen Tangenten in jedem einzelnen Falle als Richtung der Reactionen anzusehen ist, dürfte unter Festhaltung der im Vorstehenden gegebenen Regel jederzeit leicht zu bestimmen sein. Man hat dabei immer nur festzustellen, nach welcher Richtung, ob rechtsläufig oder linksgängig, die relative Drehung des Auges gegen den Zapfen erfolgt, und in welcher Richtung der Zapfen auf die Stange einwirkt, d. h. ob dieselbe auf Zug oder Druck in Anspruch genommen wird. Die von der Stange auf einen Zapfen ausgeübte Wirkung muss dann eine solche Richtung haben, dass das Auge in Folge dieser Wirkung die betreffende relative Drehung gegen den Zapfen auch wirklich annimmt. Dieselbe Bemerkung gilt natürlich auch in Bezug auf die Wirkung des Zapfens auf die Stange, insofern für diesen Fall nicht nur die Krafrichtung auf die Stange, sondern auch die Drehungsrichtung gegen die letztere die entgegengesetzte ist.

Fig. 14, Taf. I. In Fig. 13 sind die vier Tangenten der Kürze wegen mit 1, 2, 3 und 4 bezeichnet. Zur Verdeutlichung sind ferner in Fig. 14, Taf. I vier verschiedene Getriebe gezeichnet, in denen eine Stange AB wie die gedachte die Verbindung je zweier schwingenden Hebel MA und NB vermittelt. In diesen vier Fällen, welche entsprechend mit I, II, III und IV bezeichnet worden sind, soll der bei je einem der Hebel gezeichnete kräftige Pfeil nicht nur die Bewegungsrichtung des ersteren anzeigen, sondern auch andeuten, dass von diesem Hebel die Bewegung des Systems ausgehen möge, der andere Hebel daher immer als ein widerstehender anzusehen sei. Durch die an die einzelnen Gelenke gezeichneten kleineren Pfeile soll diejenige relative Bewegung der

Richtung nach angedeutet werden, welche die betreffende Stange gegen den daselbst angeschlossenen Hebel hat. Hierbei darf man nach Belieben annehmen, dass die Zapfen mit der Stange oder mit den Hebeln fest verbunden sein mögen, da nach dem Früheren durch die eine oder andere Annahme ein Einfluss auf die Richtung und Grösse der Reaction nicht ausgeübt wird, und nur Verlegungen der Angriffspunkte dieser Kräfte in ihren Richtungen damit verbunden sind. Berücksichtigt man hierbei, dass die Stange AB in den Fällen I und III auf Zug und in den mit II und IV bezeichneten Getrieben auf Druck in Anspruch genommen wird, so erkennt man leicht, dass die in Fig. 13 mit 1, 2, 3 und 4 bezeichneten Tangenten den gleichbenannten Getrieben I, II, III und IV in Fig. 14 entsprechen. Diese Zugehörigkeit gilt auch noch für die entgegengesetzten Bewegungsrichtungen, vorausgesetzt, dass auch bei diesen der Antrieb von demselben Hebel ausgeht, da in diesem Falle sowohl die relativen Drehungen, wie auch die Stangenkräfte die entgegengesetzten Richtungen annehmen.

In ähnlicher Weise wird man in jedem einzelnen Falle die Richtungslinie für die von einem Zapfen auf sein Lager ausgeübte Reaction feststellen können. Hiermit ist aber auch die Aufgabe im Wesentlichen gelöst, die Zapfenreibungen in Rechnung zu bringen, da die weitere graphische Ermittlung nunmehr nur auf die Anwendung der bekannten Regeln über die Zerlegung und Zusammensetzung der Kräfte hinausläuft. Das hierbei einzuschlagende Verfahren möge zu grösserer Deutlichkeit an einigen Beispielen gezeigt werden.

Es sei wieder ABC , Fig. 15, Taf. II, ein Winkelhebel, an dessen einem Arme CA , an dem Zapfen A die Last Q wirken möge, und für den die an dem anderen Arme B anzubringende Kraft P ermittelt werden soll. Zeichnet man für die drei Zapfen die Reibungskreise, so erhält man in deren Tangenten ao und bo , welche parallel mit den Richtungen von Q und P gezogen sind, die Richtungslinien für diese Kräfte. Da hier bei der durch den Pfeil angedeuteten Rechtsdrehung des Hebels die den Zapfen A umschliessende Stange gegen diesen Zapfen eine Linksdrehung annimmt, so muss die Tangente ao nach dem Vorstehenden den Reibungskreis auf der äusseren von C abgewendeten Seite berühren, so dass man sich also auch vorstellen kann, es sei durch die Zapfenreibung an A der Hebelarm des zu überwindenden Widerstandes vergrössert worden. In gleicher Art folgt für den Zapfen B , dessen Stange ebenfalls eine Linksdrehung gegen ihn annimmt, dass die Reactionsrichtung den Reibungskreis innerlich, d. h. hier auf der dem Zapfen C zugewendeten Seite, berühren muss, mit anderen Worten, es wird durch die Zapfenreibung an B der Hebelarm der Kraft P um eine gewisse Grösse verkleinert. Durch den Schnittpunkt o der beiden Krafrichtungen oa und ob muss daher die auf den Drehzapfen C von dessen Stützlager ausgeübte Reaction R gerichtet sein. Zieht man daher von o aus an den Reibungskreis von C diejenige Tangente oc , in deren Richtung der von o nach c hin gerichtete Zapfendruck eine Rechtsdrehung des Zapfens C gegen sein Lager bewirken kann, so findet man in dieser Tangente co die Richtungslinie für die Lagerreaction R , welche mit Q und P im Gleichgewichte sein muss. Macht man daher $oI = Q$, und zeichnet das Parallelogramm $oIIIII$, so findet man in $oIII$ die Kraft P und in oII den der Lagerreaction R gleichen und entgegengesetzten Zapfendruck. Ohne Rücksicht auf Zapfenreibungen würde man ebenso wie für Fig. 1, Taf. I oben gezeigt worden, in $OIII_0$ die Kraft P_0 erhalten, wenn man die Krafrichtungen durch die Zapfenmitten gelegt und $OI_0 = Q$ gemacht hätte. Die Zeichnung ergibt in dem vorliegenden Falle für einen Reibungscoefficienten $\mu = 0,1$ und für $Q = 100$; $P = 91,3$, $P_0 = 87,8$, daher den Wirkungsgrad $\eta = \frac{P_0}{P} = 0,962$.

Fig. 15, Taf. II.

Fig. 16. Taf. II.

Als ein anderes Beispiel sei das gewöhnliche Kurbelgetriebe, Fig. 16, Taf. II, gewählt, wie es bei Dampfmaschinen allgemein üblich ist. Auf den Bolzen A des Kreuzkopfes A_1 werde hierbei durch die Kolbenstange K die vertical abwärts gerichtete Kraft P des Dampfkolbens ausgeübt. Es soll untersucht werden, wie gross in dem durch die Zeichnung dargestellten Augenblicke der Bewegung an einem Hebelarme CE der Kurbelwelle C der Widerstand Q sein darf, welcher unter Berücksichtigung der Reibungswiderstände von jener Kolbenkraft überwunden werden kann. Hierbei soll unter P nicht der ganze Dampfdruck auf den Kolben, sondern nur die wirklich auf den Kreuzkopf übertragene Kraft, welche nach Abzug der Kolbenreibung und derjenigen in der Stopfbüchse verbleibt, verstanden werden. Ebenso soll der aus der Beschleunigung oder Verzögerung des Kolbens resultirende Massendruck¹⁾ in dem Werthe der Stangenkraft P entsprechend berücksichtigt gedacht werden. Die Richtungslinie dieser Kraft P muss durch den Mittelpunkt A des Kreuzkopfbolzens hindurchgehen, da dieser Bolzen unwandelbar mit dem Kreuzkopfe A_1 und der Kolbenstange verbunden ist, und daher eine relative Drehung des Bolzens gegen die Kolbenstange nicht stattfindet. Dagegen findet eine solche zwischen dem Bolzen A und dem Kopflager A_2 der Lenkerstange A_2B_2 statt. Die Richtungslinie der in der letzteren auftretenden Zugkraft S wird daher durch die Tangente ab an die Reibungskreise der beiden Zapfen A und B gegeben sein. (Welche der vier möglichen Tangenten hier in Frage kommt, ergibt sich nach dem Vorstehenden mit Rücksicht auf die Richtung der relativen Drehungen der Stangenlager gegen die Zapfen A und B , welche Richtungen durch die kleinen Pfeile bei A und B angedeutet sind.) Der Kreuzkopfbolzen A kann unter der Einwirkung der beiden Kräfte P und S allein nicht im Gleichgewichte sein, so lange diese Kräfte verschiedene Richtung haben; zur Herstellung des Gleichgewichtes ist vielmehr noch eine dritte Kraft erforderlich, welche von der Couliissenführung D als eine Reaction R_1 geäussert wird. Die Richtung dieser Reaction ist dadurch gegeben, dass sie von der Normale zur Führung um den Reibungswinkel φ abweicht, und für die Lage derselben gilt die Bedingung, dass die Reaction R_1 durch den Durchschnitt o_1 von P und S hindurchgehen muss. Demgemäss wird die Coulissee D auf den Kreuzkopf eine in die Gerade do_1 fallende Reaction ausüben. Ferner wird die von dem Bolzen A auf die Lenkerstange übertragene Kraft S ohne Verlust direct auf den Kurbelzapfen B in der Richtung ba wirken, und man findet in ähnlicher Art wie bei dem Hebel in Fig. 15, dass diese Zugkraft S und der in E wirkende Widerstand Q im Gleichgewichte gehalten werden durch die von dem Zapfenlager auf die Welle C ausgeübte Reaction R_2 . Die Richtungslinie der letzteren erhält man sonach in der Tangente o_2c , welche von dem Schnittpunkte o_2 der beiden Kräfte Q und S an den Reibungskreis der Axe C gelegt wird. Um nun die einzelnen Kräfte zu bestimmen, hat man nur das Kräftepolygon zu zeichnen, indem man $Io_1 = P$ macht, III parallel o_1d zieht und ferner $IIIII$ parallel mit co_2 und o_1III parallel mit Q oder FE zeichnet. Man erhält dadurch in $o_1III = Q$ den in E möglichen Widerstand, während IIo_1 die Stangenkraft S , III die Reaction der Führung und $IIIII$ den Druck auf das Lager repräsentirt, welche letzteren Kräfte daher für die Bestimmung der Dimensionen der betreffenden Theile maassgebend sind. Es darf nur erwähnt werden, dass zur Bestimmung des theoretischen Widerstandes $Q_0 = o_1III_0$ die Reaction R_1 der Führung normal zu DD angenommen werden muss, und dass die Richtungen von S

¹⁾ Siehe hierüber u. A. Radinger, Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit. Zeitschr. des öster. Ing.-Ver. 1869.

und R_2 dafür durch die Mittelpunkte von A , B und C anzunehmen sind, wie das für diese Voraussetzung durch gebrochene Linien angedeutete Kräftepolygon anzeigt. Unter Annahme eines Reibungscoefficienten für die Zapfenreibung von $\mu = 0,1$ und für die Coulissen $\mu = 0,16$ ergibt die Zeichnung für $P = 100$, $Q = 48,4$, $Q_0 = 52,5$; daher $\eta = \frac{Q}{Q_0} = 0,922$.

Selbstredend wird der Wirkungsgrad dieses Getriebes bei einer anderen Stellung der einzelnen Glieder gegen einander ebenfalls ein anderer werden.

Will man das Diagramm der Kräfte für die oscillirende Dampfmaschine wie Fig. 17, Taf. II, verzeichnen, so kann man zunächst bemerken, dass die in der Kolbenstange $B_1 D$ auftretende Kraft S tangential an die beiden Reibungskreise der Zapfen B und C gerichtet sein muss, also in dem vorliegenden Falle in die Gerade bc hineinfällt. Hiervon überzeugt man sich in folgender Art. Wenn mit P der auf den Kolben E wirkende Dampfdruck, dessen Richtung die Mittellinie BC ist, bezeichnet wird, so muss dieser Druck im Gleichgewichte sein mit den übrigen auf die Kolbenstange nebst Kolben wirkenden Kräften. Solche Kräfte sind ausser P noch drei vorhanden, nämlich die Reaction S des Kurbelzapfens B , von welcher Reaction zunächst nur bekannt ist, dass sie den Reibungskreis von B berührt, und dann die Reaction R_1 der Stopfbüchse D_1 in d gegen die Kolbenstange und diejenige R_2 der Cylinderwandung gegen den Kolben E in e . Diese Reactionen haben die Richtungen unter der Neigung φ gegen die geometrische Axe, und sind von dem Cylinder aus in die Kolbenstange beziehungsweise in den Kolben hineingerichtet.

Wenn man nun andererseits die relative Bewegung des Cylinders gegen die Kolbenstange ins Auge fasst, indem man sich etwa vorstellen mag, die Kolbenstange mit dem Kolben werde in dem betrachteten Augenblicke festgehalten, und der Cylinder verschiebe sich mit seinem Lager auf der Kolbenstange um ein sehr kleines Stück unter Einwirkung des Dampfdruckes auf den betreffenden Cylinderdeckel, so gilt für diese eingebildete Bewegung ebenfalls die Regel, dass alle auf den bewegten Cylinder wirkenden Kräfte unter sich im Gleichgewichte stehen müssen. Diese Kräfte sind nun folgende: Zunächst der Dampfdruck auf den Deckel des Cylinders, welcher Druck offenbar genau gleich dem Dampfdrucke P auf den Kolben ist, in derselben Geraden, nämlich der Mittellinie CB , wirkt, aber die entgegengesetzte Richtung des Kolbendruckes hat, daher mit $-P$ zu bezeichnen ist. Ferner wirken auf den Cylinder in denselben Punkten d und e diejenigen Reactionen, welche jetzt von der Kolbenstange und dem Kolben gegen die Wandungen der Stopfbüchse und des Cylinders geübt werden, und welche natürlich mit R_1 und R_2 von genau gleicher Grösse und entgegengesetzter Richtung sind, daher mit $-R_1$ und $-R_2$ bezeichnet werden können. Endlich wirkt auf den Schwingungszapfen C des Cylinders die von dem Lager C_1 geübte Reaction, von welcher zunächst nur bekannt ist, dass ihre Richtung eine Tangente an den Reibungskreis von C sein muss. Diese Zapfenlagerreaction sei mit Z bezeichnet. Wenn nun die vier Kräfte P , R_1 , R_2 und S im Gleichgewichte sein müssen und dasselbe auch für die vier Kräfte $-P$, $-R_1$, $-R_2$ und Z gilt, so folgt hieraus $S = -Z$, d. h. es müssen die beiden Kräfte S und Z von gleicher Grösse und in derselben Geraden von entgegengesetzter Richtung sein. Die Stangenkraft S muss daher in die Tangente cb der beiden Reibungskreise hineinfallen.

Zum Gleichgewichte der vier Kräfte P , R_1 , R_2 und S ist nun wieder wie früher erforderlich, dass die Mittelkraft zweier derselben, etwa von P und R_1 , gleich und entgegengesetzt der Mittelkraft der beiden anderen Kräfte S und R_2 sei. Verbindet man daher wieder den Durch-

schnitt o_1 zwischen P und R_1 mit demjenigen o_2 zwischen S und R_2 , so giebt $o_1 o_2$ die Richtung dieser Mittelkräfte. Macht man daher etwa $CI = P$, zieht CII parallel zu R_1 und III parallel zu $o_2 o_1$, ferner $IIIII$ parallel mit bc und $IIII$ parallel zu R_2 , so erhält man in $IIIII$ die in der Stange wirkende Kraft S , welche den Kurbelzapfen umzudrehen bestrebt ist. Ebenso gross ist, wie oben gezeigt wurde, die von dem Lager C_1 auf den Schwingzapfen C ausgeübte Reaction. Die weitere Ermittlung geschieht nun in bekannter Weise. Wenn an dem Halbmesser AF in F ein Widerstand Q auftritt, so findet man wieder in der entsprechenden Tangente $o_3 a$ von dem Schnittpunkte o_3 der Kräfte S und Q an den Reibungskreis von A die Richtung der Reaction R_3 des Kurbellagers und die Grösse dieser Reaction sowie des Widerstandes Q dadurch, dass man im Kräftepolygon $IIIII$ nach den Richtungen $o_3 a$ und $o_3 F$ zerlegt. Ohne Reibungswiderstände wäre natürlich $S = P$, und man erhält durch das Dreieck $CI IV_0$ ohne Weiteres $Q_0 = I IV_0$, wenn man durch I parallel zu Q und durch C parallel zu OA zieht.

Für einen Coefficienten der Zapfenreibung $\mu = 0,1$ und der Reibung in der Stopfbüchse und dem Cylinder von $\mu = 0,16$ ergibt die Zeichnung für $P = 100$, $Q = 61,0$, $Q_0 = 64,2$, daher $\eta = \frac{Q}{Q_0} = 0,950$.

Es muss hier bemerkt werden, dass die hier in Betracht gezogene Reibung des Kolbens und der Stange in der Stopfbüchse nur den aus dem einseitigen Drucke herrührenden Widerstand bedeutet. Diejenige Reibung, welche aus dem behufs der Abdichtung erforderlichen centralen Drucke der Kolbenliderung entsteht, muss zuvor immer schätzungsweise bestimmt und direct von dem Kolbendrucke abgehalten werden. Man hat daher den ermittelten Betrag von η nicht als den Wirkungsgrad der Dampfmaschine, sondern nur als denjenigen der in derselben zur Anwendung kommenden Getriebeeinrichtung aufzufassen.

Fig. 18, Taf. II. Dasselbe Getriebe der schwingenden Kurbelschleife, welches der hier betrachteten oscillirenden Dampfmaschine zu Grunde liegt, findet bekanntlich öfter Verwendung bei Hobelmaschinen zur Erzeugung einer schnellen Rücklaufsbewegung. Fig. 18, Taf. II stellt eine derartige Einrichtung dar, bei welcher der den Hobelmeissel M tragende Schieber GH in prismatischen Führungen durch eine Schubstange $E_1 F_1$ hin- und zurückgeschoben wird, welche ihre wechselnde Bewegung von der um den festen Zapfen D schwingenden Schleife $D_1 E_1$ erhält. Die Schwingung der letzteren wird dabei durch eine Kurbelwelle A erzeugt, deren Kurbelzapfen B in einem Gleitblocke C angreift, welcher längs der Schlitzführung C_1 des Schleifenhebels sich bewegt. Der auf die Schneide des Stichels M ausgeübte Arbeitswiderstand Q ruft wegen der einseitigen Wirkung in den Führungen etwa bei g und h die Reactionen R_1 und R_2 hervor, und es müssen diese drei Kräfte Q , R_1 und R_2 mit der durch die Zugstange $E_1 F_1$ ausgeübten Zugkraft S im Gleichgewichte sein. Die Richtung dieser Zugkraft findet man in der entsprechenden Tangente ef der Reibungskreise von E und F . Verbindet man daher wieder die Schnittpunkte o_1 von Q mit R_1 und o_2 von S mit R_2 , so erhält man durch das Kräftepolygon $o_1 IIIIII$ in $IIIII$ die Grösse der von der Stange EF auszuübenden Zugkraft, vorausgesetzt, dass man wieder $o_1 I = Q$, III parallel mit R_1 , $IIIII$ parallel mit ef und $o_1 III$ parallel mit R_2 macht. Der Kurbelzapfen B wirkt durch das Gleitlager C auf die Schleife C_1 in einer Richtung T , welche wegen der Zapfenreibung tangential an den Reibungskreis von B und wegen der Coulissenreibung unter dem Winkel φ gegen die Normale zu dem Schlitz C_1 gerichtet ist. Man erhält daher in $o_3 c$ die Richtungslinie für diese Kraft, also in der von o_3 an den Reibungskreis von D gezogenen Tangente do_3 die Linie, in welcher das Lager D_1 auf den Schwingungszapfen wirkt.

Wenn ferner die Kurbelwelle A durch eine in H an dem Hebelarme AH wirkende Kraft P bewegt wird, so ergibt die aus dem Durchschnitte o_4 von P und T an den Reibungskreis von A gezogene Tangente o_4a die Richtung für die Reaction R_4 des Wellenlagers von A . Vervollständigt man daher das Kräftepolygon, indem man die Stangenkraft $S = II\ III$ parallel o_3c und o_3d in $II\ IV$ und $IV\ III$ zerlegt, und zieht noch $II\ V$ parallel mit o_4a und $IV\ V$ parallel mit o_4H , so erhält man in $V\ IV = P$ die in H erforderliche Kraft, welche zur Bewältigung des Widerstandes $Q = o_1I$ an M genügt. Unter Voraussetzung eines Coefficienten der Zapfenreibung $\mu = 0,1$ und der gleitenden Reibung $\mu_1 = 0,16$ ergibt die Construction für $Q = 100$; $P = 84,1$, $P_0 = 66,6$, daher $\eta = \frac{P_0}{P} = 0,792$.

Bei einer Dampfmaschine mit einarmigem Balancier, Fig. 19, Taf. II, kann die Untersuchung in folgender Weise geschehen. Die auf die Kolbenstange AB nach oben wirkende Dampfkraft P fällt in die geometrische Axe des Dampfzylinders und ist daher durch den Mittelpunkt A des Zapfens vertical aufwärts gerichtet. Dagegen wirkt die Stangenkraft S , d. h. die Reaction des Balanciers in A , in einer an den Reibungskreis von A tangential gerichteten Geraden. Diese beiden auf die Kolbenstange wirkenden Kräfte P und S können, da sie nicht in dieselbe Gerade fallen, für sich nicht im Gleichgewichte sein, es ist hierzu vielmehr noch eine dritte Kraft erforderlich, welche in der Reaction R_1 der Stopfbüchse B_1 gegen die Kolbenstange zu erkennen ist. Zieht man daher durch einen mittleren Punkt wie b der Stopfbüchse die Richtungslinie von R_1 unter dem Reibungswinkel φ gegen die Axe der Kolbenstange, so erhält man in dem Durchschnitte o_1 von R_1 mit P den Punkt, durch welchen die Stangenkraft S gerichtet sein muss; diese Kraft wirkt also in der Richtung o_1a . Macht man daher o_1I gleich der Kolbenkraft P und zieht durch I eine Parallele zu R_1 , so erhält man in o_1II die von der Kolbenstange auf den Balancierzapfen A übertragene Kraft S . Es ist nicht ohne Interesse, zu bemerken, dass hierbei die Stopfbüchse B_1 einem gewissen geringen Seitendrucke $II\ I$ ausgesetzt ist. Dieser Seitendruck ist nicht etwa die Folge einer gewissen Unvollkommenheit in der Geradföhrung, wie sie bei den angenäherten Geradföhrungen, z. B. bei dem Watt'schen Parallelogramme, vorhanden ist; denn die hier vorausgesetzte Evans'sche Föhrung ist ja bekanntlich eine genau richtige. Vielmehr ist jener Seitendruck der Kolbenstange gegen die Stopfbüchse lediglich die Folge der an dem Zapfen bei A auftretenden Zapfenreibung. Man kann sich zur Verdeutlichung des Vorganges etwa vorstellen, die Kolbenstange werde in ihrem oberen Kopflager mit einer der Zapfenreibung gleichen Kraft von dem Balancier bei dessen Rechtsdrehung nach links gebogen, in Folge dessen die Reaction der Stopfbüchse wachgerufen wird. Es ist auch ersichtlich, dass der Seitendruck R_1 beim folgenden Niedergehen des Kolbens von der anderen Seite der Stopfbüchse, also in der entgegengesetzten Richtung ausgeübt wird, indem die Zapfenreibung in A bei jedesmaligem Bewegungswechsel ihre Richtung umkehrt. Dagegen behält die Stangenkraft S beim Niedergange wie beim Aufgange des Kolbens ihre in die Tangente o_1a fallende Lage bei, indem bei jedem Bewegungswechsel, d. h. in den todten Punkten, zwar die Drehungsrichtung des Zapfens A , zugleich aber auch die Richtung der Stangenkraft S umgekehrt wird. Man kann sich vorstellen, dass durch die Zapfenreibung an A der Hebelarm der treibenden Stangenkraft in jedem Falle um eine gewisse Grösse verkleinert wird.

Auf den Balancier AC wirken ausser der Stangenkraft S noch drei andere Kräfte und zwar die durch den Gegenlenker DE , die Kurbelstange FG und durch die Coulissenföhrung K_1K_2 ausgeübten Reactionen. Für die Kraft L des Lenkers und diejenige T der Kurbelstange

Fig. 19, Taf. II.

findet man die Richtungslinien nach dem Früheren in den Tangenten an die Reibungskreise der Zapfen D und E sowie F und G . Mit Rücksicht auf die Richtung der relativen Bewegungen der Stangen gegen diese Endzapfen, welche in der Figur durch kleine Pfeile angedeutet sind, und mit Rücksicht darauf, dass die Kurbelstange gezogen, der Gegenlenker gedrückt wird, ergeben sich diese Tangenten de und fg unzweifelhaft. Die Richtung der Reaction R_2 , welche die Coulisse $K_1 K_2$ auf das Gleitstück C_1 des hinteren Zapfens C ausübt, muss von der Normale zu $K_1 K_2$ um den Reibungswinkel φ abweichen, und da das Gleitstück eine Wirkung auf den Zapfen C nur tangential an dessen Reibungskreis übertragen kann, so erhält man in kc die Richtung und Lage der Reaction R_2 . In Fig. 19a ist das Gleitstück C_1 besonders gezeichnet. Man erkennt daraus zunächst, dass bei dem Kolbenaufgange die untere Coulisse $K_1 K_2$ und bei dem Niedergange die obere Leitschiene $K'_1 K'_2$ die Reaction ausübt. Es findet dabei sowohl während des Aufganges wie während des Niederganges ein Wechsel der Druckrichtung in der Mitte des Kolbenhubes, d. h. in demjenigen Augenblicke statt, in welchem der Balancier eine mit der Geradföhrung $K_1 K_2$ parallele Lage CA_2 resp. CA_4 hat. Bewegt sich nämlich der Balancier aus seiner tiefsten Lage CA_1 aufwärts bis in die mittlere Stellung, so nimmt C_1 eine Bewegung in der Richtung von K_1 nach K_2 an, es gilt daher wegen der Rechtsdrehung des Zapfens C in dem Gleitstücke C_1 die Tangente $k_1 c_1$ als Drucklinie. Sobald indess der Balancier über die mittlere Lage CA_2 hinaus bewegt wird, nimmt das Gleitstück eine Verschiebung von K_2 nach K_1 an, folglich ist, da die Zapfenverdrehung auch jetzt noch eine rechtsläufige bleibt, nunmehr in der Tangente $k_2 c_2$ die Reactionsrichtung gefunden. Denkt man sich nun für den Niedergang des Kolbens den Balancier aus der höchsten Lage CA_3 in die mittlere CA_4 übergehend, wobei die obere Leitschiene $K'_1 K'_2$ reagiert, so erhält man zufolge der Verschiebung von C_1 nach rechts und wegen der nunmehr linksgängigen Drehung des Zapfens C die Reactionsrichtung in $k_3 c_2$ oder $k_3 k_2$, und endlich giebt $k_4 k_1$ die Richtung von R während des letzten Viertels der Bewegung an, d. h. während der Balancier aus seiner mittleren Lage CA_4 in die unterste CA_1 bewegt wird. In jedem Falle geht daher die Reaction der Coulissen so an der Zapfenmitte C vorüber, dass dadurch eine Vergrößerung des Hebelarmes von R_2 herbeigeföhrt wird, wie es ja auch mit der hemmenden Wirkung der Reibung im Einklange steht.

Damit nun die vier auf den Balancier einwirkenden Kräfte S , L , T und R_2 im Gleichgewichte stehen, muss die Mittelkraft der sich in o_2 schneidenden Kräfte L und R_2 ebensowohl wie die Resultirende der sich etwa in o_3 schneidenden Kräfte S und T in die Verbindungsgerade $o_2 o_3$ der Schnittpunkte hineinfallen. Bei den der Figur zu Grunde liegenden Verhältnissen fällt der Durchschnittspunkt o_3 der beiden Kräfte S und T über die Grenzen der Zeichnung hinaus; um nun doch die Richtung von $o_2 o_3$ zu finden, kann man sich etwa folgender Hilfsconstruction bedienen. Zieht man durch o_2 die beliebige Gerade $o_2 \alpha$, welche die Richtungen von S und T in α und β schneidet, und ferner mit $o_2 \alpha$ irgend eine Parallele $\sigma \omega$, welche die Richtungen von S und T in σ und τ schneidet, so erhält man in einem Punkte ω dieser Parallelen, welcher so gelegen ist, dass man die Proportion hat:

$$\alpha\beta : \sigma\tau = \beta o_2 : \tau \omega,$$

offenbar einen Punkt der geraden Verbindungsline von o_2 mit dem unbekannten Schnittpunkte o_3 zwischen S und T ; denn man hat nach einem bekannten Satze der Geometrie

$$\alpha\beta : \sigma\tau = \beta o_3 : \tau o_3 = \beta o_2 : \tau \omega.$$

Zieht man daher durch α die beliebige Gerade $\alpha\delta$, macht $\alpha\gamma = \sigma\tau$, verbindet γ mit β und zieht

durch o_2 die Gerade $o_2\delta$ parallel zu $\beta\gamma$, so erhält man in $\gamma\delta$ die Strecke $\tau\omega$, durch deren Endpunkt ω die gesuchte Verbindungslinie o_2o_3 gehen muss. Hiernach ergibt sich das Kräftepolygon, indem man durch o_1 eine Parallele mit fg und durch II eine Parallele mit o_2o_3 legt. In o_1III erhält man dann die von der Pläuelstange FG auf den Kurbelzapfen G übertragene Zugkraft, während man die Druckkraft L des Gegenlenkers in $IIIIV$ und die Reaction R_2 der Geradföhrung in $IIIV$ erhält, sobald man die Mittelkraft $IIIII$ nach den Richtungen von L und R_2 zerlegt. Wenn nun der Widerstand Q der Kurbelwelle H an dem Hebelarme HJ wirksam ist, so giebt wieder o_4h die Reaction des Lagers auf die Axe H , und man hat durch o_1 eine Parallele zu o_4J und durch III eine solche zu o_4h zu ziehen, um in Vo_1 die Grösse des in J zu überwindenden Widerstandes Q zu erhalten. Ohne Reibungswiderstände liefert das durch gebrochene Linien dargestellte Kräftepolygon $o_1I III_0 IV_0 V_0$ in V_0o_1 die theoretische Widerstandskraft Q_0 .

Die Zeichnung ergibt für $\mu = 0,1$ für die Zapfenreibung und $\mu_1 = 0,16$ für die gleitende Reibung für $P = 100$; $Q = 49,5$, $Q_0 = 54,9$, daher $\eta = \frac{Q}{Q_0} = 0,902$.

Für das Getriebe des gewöhnlichen Kreisexcenters, Fig. 20, Taf. III, ermittelt sich das Verhältniss der Kraft zur Last in derselben Weise, wie bei der Kurbel. Es möge vorausgesetzt werden, dass die Betriebswelle A mittelst des Excenters B und dessen Stange BC die in den Büchsen E_1 und D_1 geföhrte Stange ED bewegen solle. Auf die letztere wirken dann ausser dem Arbeitswiderstande Q , welcher in die geometrische Axe der Stange DE hineinfällt, noch die Schubkraft S der Excenterstange, deren Richtung durch die Tangente bc der beiden Reibungskreise gegeben ist, und die beiden Reactionen R_1 und R_2 der Führungsbüchsen D_1 und E_1 . Nimmt man diese Reactionen in d und e unter dem Reibungswinkel φ gegen die Normale zur Bewegung an, so erhält man wieder in der Verbindungslinie der Schnittpunkte o_1 zwischen Q und R_1 mit o_2 zwischen S und R_2 die Richtung der Mittelkraft für jedes dieser Paare von Kräften. Macht man daher o_1I gleich Q , und zieht durch I die Gerade $I III$ parallel mit o_1o_2 und wieder $II III$ parallel mit bc und $I III$ parallel mit R_2 , so erhält man in $III II$ die von der Excenterstange auszuübende Schubkraft S . Soll die Bewegung der Betriebswelle A durch die in F angreifende Kraft P erfolgen, so erhält man wieder in ao_3 die Richtung der von dem Wellenlager auf A ausgeübten Reaction R_3 und hat daher in dem Kräftepolygon durch II und III die Parallelen mit P und o_3a zu ziehen, um in $IV II$ die erforderliche Umdrehungskraft in F zu erhalten. Für $\mu = 0,1$ und $\mu_1 = 0,16$ erhält man aus der Zeichnung für $Q = 100$, $P = 36,2$, $P_0 = 22,8$, daher $\eta = \frac{P_0}{P} = 0,630$, welcher Werth hauptsächlich dem grossen Durchmesser des Reibungskreises der excentrischen Scheibe B seinen geringen Betrag verdankt.

Eine interessante Anwendung des Kurbelgetriebes zeigt die in Fig. 21, Taf. III angegebene Anordnung, welche den bekannten Steinbrechmaschinen zu Grunde liegt. Die Kurbelstange BC ist hierbei mit den beiden Schenkeln DE und FG eines Kniees gegliedert, durch dessen Stemmung die um H drehbare Platte HJ die Zertrümmerung des bei L befindlichen Materials bewirkt. Es ist zunächst klar, dass die beiden Schenkel wegen der drehbar angeschlossenen Enden nur in den Tangenten an die Reibungskreise de und fg Kräfte zu übertragen vermögen. Hieraus folgt aber ferner, dass die Kraft S der Kurbelstange, deren Richtung den Reibungskreis von B tangirt, durch den Schnittpunkt o_2 der beiden Kräfte T und T_1 der Schenkel hindurchgehen muss. Die Reaction R_1 des Schwingzapfens H muss dagegen durch den Durchschnitt o_1 gerichtet sein, in welchem die Strebenkraft T des Schenkels DE sich mit dem Arbeits-

widerstande Q trifft. Wenn die Bewegung der Kurbelwelle A durch die Kraft P in K hervorgerufen wird, so erhält man in bekannter Weise in der Tangente o_3a an den Reibungskreis von A die Richtung, in welcher das Kurbelwellenlager gegen die Welle reagiert. Hiernach zeichnet sich das Kräftepolygon wie folgt: Man macht o_1I gleich dem Widerstande, welchen das Material seinem Zerdrücken entgegensetzt, zieht III parallel mit o_1h und erhält in o_1II die in DE auftretende Strebkraft T . Die in dem anderen Schenkel FG zur Aeusserung gelangende Kraft T_1 erhält man dann in $IIII$, wenn man durch II eine Parallele mit fg und durch o_1 eine solche mit o_2b legt. Endlich findet man durch Zerlegung der Stangenkraft $IIIo_1$ nach den Richtungen von P und o_3a in $IIIIV$ die in dem Punkte K senkrecht zu AK anzubringende Umdrehungskraft P . Die gebrochenen Linien deuten wieder das Diagramm für die Ermittlung der theoretischen Kraft $P_0 = III_0 IV_0$ an.

Unter Annahme eines Reibungskoeffizienten $\mu = 0,1$ liefert die Zeichnung für $Q = 100$; $P = 15,4$, $P_0 = 12,3$, daher $\eta = \frac{P_0}{P} = 0,80$.

Als ein ferneres Beispiel eines Kniehebelgetriebes sei das Lochwerk für Handbetrieb, Fig. 22, Taf. III, gewählt, wie es dazu dient, Kesselbleche zu lochen. Hierbei sind zwei Winkelhebel A_1CD_1 und B_1CE_1 mit dem Bolzen C so gegen einander gestützt, dass ein Zusammenpressen der beiden Hebelenden D_1 und E_1 mittelst der Schraubenspindel FG eine Abwärtschiebung der Stempelstange HJ in ihrer Führungsbüchse H_1J_1 bewirkt, in Folge deren der Lochstempel L das gewünschte Loch durch die Blechplatte K hindurchdrückt. Zu dem Ende wird die Schraube an ihrem vierkantigen Kopfe mit Hülfe eines längeren Schlüssels gedreht, so dass die entgegengesetzten Gewinde der Schraube die Muttern D_2 und E_2 mit einer bestimmten Kraft P in derselben Art gegen einander ziehen, wie es bei der in Fig. 9, Taf. I besprochenen Wagenkuppelung auch der Fall ist. Wegen der Bogenbewegung der Hebelenden sind die Muttern mit den letzteren drehbar mittelst der Zapfen D und E verbunden, woraus ohne Weiteres folgt, dass die Kraft P , mit welcher die Winkelhebel zusammengezogen werden, in der Tangente de der Reibungskreise der Zapfen D und E wirksam ist. Fasst man einen der Hebel, etwa den unteren, B_1E_1 ins Auge, so muss derselbe unter Einfluss der auf ihn einwirkenden Kräfte im Gleichgewichte sein. Diese Kräfte bestehen ausser der in der Richtung von e nach d wirkenden Zugkraft P in den beiden Reactionen R_1 des Zapfens C und R_2 des Zapfens B . Für die erstere von dem oberen Hebel A_1D_1 durch den Zapfen C ausgeübte Reaction R_1 hat man in der den relativen Verdrehungen entsprechenden Tangente ac an die Reibungskreise von A und C die Richtungslinie, folglich muss die von dem Zapfen B ausgeübte Reaction R_2 durch den Schnittpunkt o_1 von P und R_1 gehen, also in die Richtung o_1b fallen. Macht man daher o_1I gleich der von der Schraube auf die Mutter E_2 ausgeübten Zugkraft P , und zieht durch I die Gerade III parallel zu o_1b , so erhält man in IIo_1 die Wirkung R_1 des oberen Hebels auf den unteren und in III die von dem Zapfen B der Bewegung entgegengesetzte Reaction R_2 .

Die Stempelstange HJ muss nun wieder im Gleichgewichte sein unter Einwirkung dieser von b nach o_1 auf sie gerichteten Kraft R_2 , des Widerstandes Q , welchen das zu lochende Blech in der Axe LH des Stempels vertical aufwärts äussert und der beiden Reactionen R_3 und R_4 , welche die Führungsbüchse H_1J_1 auf die Stange HJ ausübt. Nimmt man als Angriffspunkte für diese letzteren Reactionen die Punkte h und i , welche von den äussersten Kanten um eine passend erachtete Grösse, etwa 5 mm, abstehen, und zeichnet die Richtungen von R_3 und R_4 um den Reibungswinkel φ abweichend von den Normalen der Bewegung, so ergibt die Verbindung

$o_2 o_3$ der Schnittpunkte von R_2 mit R_3 und von Q mit R_4 wieder in bekannter Art das Mittel zur Vervollständigung des Kräftepolygons. Zieht man zu dem Zwecke durch I eine Parallele mit R_3 und dann II III parallel zu $o_2 o_3$, ferner durch II die mit Q und durch III die mit R_4 parallelen Geraden, so erhält man in IV II den Widerstand Q , welcher durch die auf die Mutter E_2 ausgeübte Zugkraft P überwunden werden kann. Es ist leicht ersichtlich, dass das durch abgebrochene Linien angedeutete Kräftepolygon, für welches die Druckrichtungen durch die Zapfenmitten und normal zu der Führungsbüchse gerichtet sind, in IV_0 II_0 den theoretischen Widerstand Q_0 für dasselbe P ergeben. Aus der Zeichnung folgt für $\mu = 0,1$, $\mu_1 = 0,16$ und $P = 100$; $Q = 194$, $Q_0 = 350$, daher $\eta = \frac{Q}{Q_0} = 0,554$.

Es kann bemerkt werden, dass das Verhältniss von P und Q_0 dasselbe bleibt, ob man, wie bei der hier gewählten Anordnung, jeden der beiden Arme $A_1 D_1$ und $B_1 E_1$ mit der Kraft P anzieht, oder diese Kraft P nur auf den einen Arm, etwa $B_1 E_1$, bewegend wirken lässt, was man z. B. dadurch erreichen könnte, dass man anstatt der Mutter D_2 nur ein cylindrisches Auge für die Spindel anordnete, welche letztere durch Bundringe an einer Verschiebung durch dieses Auge gehindert wäre, etwa in einer Weise, wie bei dem Spannkloben, Fig. 10, Taf. I. An dem Verhältnisse der Zugkraft P und des theoretischen Widerstandes Q_0 zu einander wird hierdurch nichts geändert; denn wenn die bewegende Kraft P auch nur auf den einen Hebel E_1 ausgeübt würde, so müsste doch an dem anderen Hebel D_1 eine mit P gleiche und entgegengesetzte Reaction sich einstellen, welche bei der angedeuteten Ausführungsart durch den erwähnten Bundring des Auges bei D aufgenommen werden würde. Der Unterschied zwischen den beiden Anordnungen besteht nur darin, dass bei einer Bewegung beider Hebelenden die einer bestimmten kleinen Drehung der Schraube zugehörige Verschiebung der Stempelstange doppelt so gross ist, als wenn nur ein Hebelende bewegt, das andere aber festgehalten wird. Natürlich ist dabei auch die zu einer bestimmten kleinen Drehung der Schraubenspindel erforderliche Arbeit resp. Umdrehungskraft in dem einen Falle doppelt so gross als in dem anderen. Diese letztere Bemerkung kann jedoch streng nur für den reibungslosen Bewegungszustand gelten, da mit der Anordnung eines die Reaction — P aufnehmenden Festpunktes, wie z. B. des mehrfach gedachten Bundringes in dem Auge bei D , eine neue Reibung hinzutritt, welche in derselben Art zu ermitteln ist, wie dies gelegentlich des Spannklobens der Fig. 10, Taf. I geschehen ist. Die im Obigen vorgenommene Untersuchung des vorliegenden Getriebes erstreckt sich nicht auf die an der Schraube auftretenden Widerstände, eine Ermittlung derselben würde ebenfalls in der früher in Betreff der Kuppelung, Fig. 9, Taf. I, gezeigten Weise geschehen müssen.

Die Grösse des mit dem Kniehebelgetriebe durch eine bestimmte Kraft P zu überwindenden Widerstandes Q hängt ebenso wie die Grösse des Wirkungsgrades wesentlich von der Stellung des Knies, d. h. von dem Winkel ab, welchen die Mittellinien der beiden Knieschenkel mit einander bilden. Es ist leicht zu erkennen, dass dieser Widerstand Q um so grösser, dagegen der Wirkungsgrad η um so kleiner wird, je mehr sich das Knie der gestreckten Lage, d. h. der gedachte Winkel der Grösse 180° nähert. Setzt man diese letztgedachte Kniestellung oder vielmehr eine solche voraus, welche von der gestreckten Lage nur noch um einen unendlich kleinen Winkel abweicht, Fig. 23, Taf. III, so würde beim Nichtvorhandensein schädlicher Widerstände eine auf den Zapfen C wirkende Kraft P , wie leicht ersichtlich ist, einen unendlich grossen Widerstand $\left(Q_0 = \frac{P}{\cos. 90^\circ} = \infty \right)$ zu überwinden vermögen.

Fig. 23, Taf. III.

Wegen der Zapfenreibungen sind in diesem Falle aber die Druckrichtungen in den Tangenten ac und bc der Reibungskreise zu suchen, und man findet daher die in den Schenkeln wirkenden Kräfte aus dem Parallelogramm $caIb$, wenn cI gleich P gemacht wird. Der grösste Widerstand Q , welcher durch die Kraft P ausgeübt werden kann, ergibt sich daher zu $Q = P \tan \omega$, wenn der stumpfe Winkel acb , welchen die Druckrichtungen mit einander bilden, mit 2ω bezeichnet wird. Der Wirkungsgrad $\eta = \frac{Q}{Q_0}$ wäre in diesem Augenblicke, für welchen $Q_0 = \infty$ ist, gleich Null anzunehmen.

Fig. 24, Taf. III.

Setzt man ferner für das Knie den Zustand einer rückgängigen Bewegung voraus, d. h. nimmt man an, dass ein Oeffnen desselben unter Einfluss der als treibend aufzufassenden Reactionen in den Schenkeln herbeigeführt werden solle, so ist klar, dass ein solches Oeffnen oder Zurückgehen von dem Augenblicke an nicht mehr eintreten kann, in welchem die Richtungen dieser Reactionen in eine und dieselbe Gerade fallen. Zeichnet man daher das Knie in solcher Stellung, Fig. 24, Taf. III, in welcher die beiden Tangenten ac und bc an die Reibungskreise in dieselbe Gerade fallen, so findet man hierdurch die Grenzlage des Kniees, bis zu welcher dasselbe selbstsperrend ist. Der Winkel $2(\omega) = ACB$, welcher von dem Winkel 2ω in Fig. 23 nur ganz unerheblich abweicht, bestimmt daher nach beiden Seiten hin die Grenzstellungen, innerhalb deren ein Rückgang des Getriebes, d. h. ein Oeffnen der Presse unter Einfluss der Reaction zwischen den Pressbacken derselben nicht stattfinden kann. Der Winkel (ω) hängt in jedem einzelnen Falle von den constructiven Verhältnissen der Knieschenkel ab, und wird um so grösser sein, je kürzer deren Länge von Zapfen zu Zapfen und je grösser die Durchmesser der Zapfen sind. Diese Verhältnisse sind insbesondere bei allen denjenigen Einrichtungen zu berücksichtigen, bei denen von dem Kniegetriebe Gebrauch zum Festhalten von Gegenständen gemacht wird, z. B. bei einigen der neueren amerikanischen Parallelschraubstöcke.

Die in den bisherigen Beispielen zur Bestimmung des Wirkungsgrades eines Maschinengetriebes angewendete Methode kann auch dazu dienen, den Betrag gewisser Reibungswiderstände zu ermitteln, von deren Auftreten man zu einer nützlichen Einwirkung bei manchen Arbeitsprocessen Gebrauch macht. So wird die Reibung insbesondere in der gesamten Fadenindustrie in grösster Häufigkeit zur Erzeugung der gewünschten Fadenspannung benutzt. Bei jeder Nähmaschine und bei jeder Waterspindel kommt diese Methode zur Anwendung.

Fig. 25, Taf. III.

Es sei AB , Fig. 25, Taf. III, eine gewöhnliche Waterspindel mit dem Arkwright'schen Flügel CC , welcher an der schnellen Umdrehung der Spindel unmittelbaren Antheil hat. Der durch das feste Glasauge D mit bestimmter Geschwindigkeit v einlaufende Faden F , welcher nach einigen Umwindungen des einen Flügelarms nach der lose auf der Spindel AB befindlichen Spule L gelangt, dient dabei für die Spule als Mitnehmer, indem er diese in derselben Richtung mit herumschleppt, in welcher die Spindel und der Flügel sich drehen. Hierbei wird die Spule durch die sich ihr darbietenden Reibungswiderstände in gewissem Grade zurückgehalten und zwar in jedem Augenblicke in solchem Grade, dass das jederzeit einlaufende Garnstück vermöge der Differenz zwischen Spindel- und Spulenumdrehungen gerade aufgewunden wird. Die erwähnte Reibung der Spule, durch welche die Fadenspannung bestimmt ist, findet dabei vornehmlich an zwei Stellen statt, nämlich einmal am Umfange der Spindel als Zapfenreibung und ferner als gleitende oder Spurreibung an der unteren Spulenscheibe G , mit welcher die Spule auf der langsam auf- und absteigenden Spulenbank EE ruht. Diese Reibungen müssen einen gewissen Betrag erreichen, damit die Fadenspannung genügend gross zu einer dichten

Bewickelung ist, und damit der Faden zwischen D und B nicht in Folge der Centrifugalkraft zu Ausbauchungen und damit zu Verwickelungen mit den Fäden der Nachbarspindeln Veranlassung gebe. Die Fadenspannung S kann in folgender Weise ermittelt werden. Ist $G = HA$ das Gewicht der Spule S mit Einschluss des bereits auf ihr befindlichen Garnquantums, so erzeugt dieses Gewicht auf der Spulenbank EE an der ringförmigen Auflagerfläche Reibung. Man kann sich daher die Spulenbank EE durch Reactionen ersetzt denken, welche in einem mittleren Berührungskreise vom Durchmesser EE^1) gleichmässig vertheilt sind, und welche sämmtlich um den Reibungswinkel φ gegen die Normale in der durch die Bewegung vorgeschriebenen Richtung abweichen. Wie hinsichtlich der Spurzapfenreibung in Fig. 8, Taf. I angegeben, kann man auch hier alle Reactionen in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten a_1 und a_2 des mittleren Berührungskreises vereinigt denken, und man erhält durch das Parallelogramm $AJHK$ in AJ und AK die Reactionen der Spulenbank, daher in den horizontalen Componenten a_1i und a_2k dieser Reactionen die Reibungswiderstände an der Spulenscheibe. Wenn nun der Faden in der Richtung fc mit der Spannung S die Spule anzieht, so reagirt die Spindel mit einem gleich grossen Drucke in der Richtung der parallel zu fc an den Reibungskreis der Spindel gelegten Tangente ba . Es kommt daher auf die Untersuchung des Gleichgewichts der Spule unter Einfluss der beiden Reibungen a_1i , a_2k , ferner der Fadenspannung S und der Reaction der Spindel in der Richtung ba an. Verbindet man zu dem Ende wieder den Schnittpunkt o_1 der Fadenspannung S und der Reibung a_2k mit demjenigen o_2 der Reibung a_1i und der Spindelreaction, so erhält man die Fadenspannung S in IIo_2 , wenn man $Io_2 = a_1i$ macht, und $I II$ parallel zu $o_1 o_2$ zieht.

Bei den bisherigen Untersuchungen ist immer stillschweigend angenommen worden, dass ein einziges Lager zur Aufnahme des Zapfendruckes diene. In Wirklichkeit ist dies niemals der Fall, vielmehr wird jede Welle in mindestens zwei Punkten oder Lagern gestützt werden, und daher wird sowohl der Widerstand Q wie auch die Triebkraft P in diesen Lagern bestimmte Drucke hervorrufen, deren verhältnissmässige Grössen von den Abständen dieser Kräfte von den Lagern abhängig sind. Denkt man z. B. in Fig. 26, Taf. III die in den Lagern A_1 und A_2 unterstützte Welle in C durch einen an dem dort befindlichen Rade vom Halbmesser $AG = q$ wirkenden Widerstand Q belastet, so kann man diese Kraft in zwei in den Normalebenen durch A_1 und A_2 parallel zu Q an gleichem Arme q wirkende Seitenkräfte Q_1 und Q_2 zerlegt denken, welche Kräfte man den bekannten Beziehungen $Q_1 = Q \frac{A_2 C}{A_1 A_2}$ und $Q_2 = Q \frac{A_1 C}{A_1 A_2}$ gemäss leicht durch Construction finden kann.

Fig. 26, Taf. III.

Denkt man sich nun für jedes der beiden Lager die im Vorstehenden mehrfach angegebene Construction zur Bestimmung der Triebkraft ausgeführt, so erhält man in P_1 und P_2 diejenigen Kräfte, welche in den Ebenen durch A_1 und A_2 an den parallelen Hebelarmen $AH = p$ angebracht werden müssten, um jene Widerstände Q_1 und Q_2 zu überwinden. Es folgt nun leicht, dass diese Kräfte P_1 und P_2 unter der Voraussetzung gleicher Zapfendurchmesser und gleicher Reibungscoefficienten, d. h. also gleicher Reibungskreise in A_1 und A_2 zu einander in demselben Verhältnisse stehen müssen, wie Q_1 und Q_2 . Denkt man sich daher die beiden

¹⁾ Streng genommen ist der Reibungshalbmesser $\varrho = \frac{2}{3} \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}$, unter r_1 und r_2 den äusseren resp. inneren Halbmesser der ringförmigen Stützfläche verstanden.

parallelen Triebkräfte P_1 und P_2 zu einer Mittelkraft P vereinigt, so muss diese letztere mit Q in derselben Ebene durch C liegen. Auch ergibt sich, dass man auf diese Weise zu derselben Kraft P gelangen muss, welche man erhält, wenn man, wie bisher immer angenommen wurde, direct aus Q mit Benutzung des Reibungskreises die treibende Kraft P bestimmt.

Aus dieser Betrachtung folgt nun, dass die in dem Vorstehenden angegebene Construction zur Ermittlung der Zapfenreibung auf strenge Gültigkeit nur Anspruch machen kann, wenn die Triebkraft P mit dem Widerstande Q in derselben zur Axe senkrechten Ebene liegt, und die Durchmesser der Zapfen gleiche Grösse haben. In der Wirklichkeit wird die erstere Bedingung nur in den allerseltensten Fällen erfüllt sein, und auch die Zapfen einer Welle sind öfter von verschiedener Stärke. Es handelt sich daher noch darum, diesen Verhältnissen bei der Zeichnung des Kräftepolygons Rechnung zu tragen.

Fig. 26, Taf. III.

Zu dem Ende sei angenommen, dass die zur Ueberwindung des Widerstandes Q in Fig. 26, Taf. III, dienende Kraft P etwa in B , also in einem Punkte ausserhalb der Lager A_1 und A_2 angreife, ein Fall, welcher in Wirklichkeit sehr häufig vorkommt. Es soll angenommen werden, dass der Widerstand Q in C an einem Hebelarme $AG = q$ und die Kraft P in B an einem Arme $AH = p$ wirken möge. Wären gar keine Reibungswiderstände vorhanden, so könnte man P_0 und Q in derselben Ebene wirkend annehmen und erhielte $P_0 = o_1 P_0$ in bekannter Art, wenn man den Durchschnitt o_1 mit dem Mittelpunkt A verbinden und $o_1 Q$ nach dieser Richtung und derjenigen von P zerlegen würde. Man denke sich nun zunächst durch eine einfache, in der Figur nicht weiter angegebene Construction Q in die beiden in A_1 und A_2 wirkenden Seitenkräfte $Q_1 = Q \frac{A_2 C}{A_1 A_2}$ und $Q_2 = Q \frac{A_1 C}{A_1 A_2}$ zerlegt, und diese Kräfte gleich $o_1 Q_1$ und $o_1 Q_2$ auf der Richtung von Q angetragen. In derselben Art zerlege man P_0 in zwei parallele Kräfte P_1 und P_2 , welche ebenfalls in A_1 und A_2 an dem Hebelarme $AH = p$ wirkend zu denken sind, und für welche man hat:

$$P_1 = P \frac{A_2 B}{A_1 A_2}; \quad P_2 = P \frac{A_1 B}{A_1 A_2}.$$

Diese Kräfte trage man auf der Richtung von P als $o_1 P_1$ und $o_1 P_2$ und zwar nach entgegengesetzten Richtungen auf, da P ausserhalb der Stützpunkte A_1 und A_2 wirkt. Nunmehr findet man die Mittelkraft von P_1 und Q_1 in der Diagonale $o_1 D$ und es wird durch diese in der Ebene durch A_1 wirkende Kraft eine gleiche und entgegengesetzte Reaction des Lagers A_1 rege gemacht werden. Diese Reaction R_1 fällt aber nicht in dieselbe Gerade $o_1 D$ wie die Mittelkraft, da an dem Lager A_1 allein Gleichgewicht nicht vorhanden ist. Man findet diese Reaction R_1 vielmehr ihrer Lage nach in der an den Reibungskreis von A_1 parallel mit $o_1 D$ gerichteten Tangente $a_1 a_1$. In derselben Art findet man für das Lager A_2 den Zapfendruck in der Diagonale $o_1 E$ und in der hiermit parallelen Tangente $a_2 a_2$ an den Reibungskreis von A_2 die Richtung der Reaction R_2 , welche das Lager A_2 auf seinen Zapfen ausübt. Nunmehr hat sich ergeben, dass die Welle unter Einwirkung zweier Kräftepaare steht, von denen das eine aus den Kräften $o_1 D$ und R_1 und das andere aus denjenigen $o_1 E$ und R_2 gebildet wird. Da man diese Kräftepaare in der Richtung der Axe beliebig verschoben, also auch in einer gemeinschaftlichen Ebene wirksam denken kann, so findet man nun P in bekannter Weise dadurch, dass man den Durchschnitt o_1 mit demjenigen o_2 zwischen R_1 und R_2 verbindet, und die Widerstandskraft $o_1 Q$ nach dieser Diagonale $o_1 o_2$ und der Richtung von P zerlegt. Man erhält dann in $o_1 P$ die

erforderliche Umdrehungskraft P . In Fig. 27, Taf. III, sind die Reibungskreise von A_1 und A_2 in grösserem Maassstabe gezeichnet, und man erkennt daraus, dass die Richtung der Diagonale R nur wenig abweicht von derjenigen Richtung, welche man erhält, wenn man von dem Durchschnittspunkte o_1 an einen mittleren Reibungskreis (etwa den punktirt gezeichneten) die betreffende Tangente legt. Man wird daher in den meisten Fällen, und besonders dann, wenn die Ebenen von P und Q beide zwischen den Lagern in nicht zu grossen Abständen von einander gelegen sind, die in den früheren Beispielen angegebene einfachere Construction mit hinreichender Genauigkeit zur Anwendung bringen dürfen. Nur für genauere Bestimmungen, besonders bei ausserhalb der Lager angreifenden Kräften dürfte die hier besprochene Construction sich erforderlich machen. Dabei mag noch erwähnt werden, dass auch die letztere noch mit einer geringen Ungenauigkeit behaftet ist, insofern die Seitenkräfte P_1 und P_2 nicht aus P , sondern aus P_0 bestimmt worden sind. Der hieraus folgende Fehler wird aber immer einen ganz verschwindend kleinen Betrag haben und eine Correction des Resultats wohl niemals nöthig sein, wie man sie etwa vornehmen könnte, indem man die gedachte Construction noch einmal unter Zugrundelegung des gefundenen Werthes von P bei der Bestimmung von P_1 und P_2 wiederholt.

Fig. 27, Taf. III.

Nunmehr lassen sich auch sämtliche Reibungswiderstände bestimmen, welche an der Schraube auftreten. Es sei, Fig. 28a, Taf. IV, S_2S_3 die Richtung der Gewindegänge in einem mittleren Abstände von der Axe und mögen S_1s_1 und S_1s_2 die Reactionsrichtungen in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten des Gewindes vorstellen, so dass dieselben den Winkel $DS_1s_1 = DS_1s_2 = \varphi + \alpha$ mit der Schraubenaxe bilden, unter α den Neigungswinkel der Schraubengewinde S_2S_3 gegen die zur Axe normale Ebene verstanden. Man erhält den in jedem dieser Punkte auftretenden senkrecht zur Axe wirkenden Widerstand $q_1 = CB$, wenn man die Belastung der Schraubenspindel $Q = DA_1$ macht und durch A_1 eine Parallele mit S_1s_1 sowie durch D eine Parallele mit S_1s_2 zieht. Die Belastung Q drückt ausserdem auch die Mutter M mit deren ringförmiger Stützfläche A_2A_3 auf den Ständer K , so dass an dieser Berührungsfläche ringsherum Reibungen auftreten. Diese letzteren kann man als Spurreibung in einer mittleren Kreislinie A_2A_3 wirksam und in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten vereinigt denken. Zieht man daher die entsprechenden Reactionslinien A_1a_1 und A_1a_2 unter dem Reibungswinkel φ gegen die Axe A_1D , so erhält man in $CE = q_2$ die Grösse der Reibung in jedem der beiden Stützpunkte der Kreisfläche A_2A_3 , wenn man die Gerade DE parallel zu A_1a_2 legt. Diese beiden Kräftepaare q_1q_1 und q_2q_2 kann man etwa in den Punkten b_1b_2 resp. c_1c_2 , Fig. 28b, wirksam denken und erhält durch Vereinigung je zweier Kräfte ein resultirendes Kräftepaar mit den Kräften $d_1e_1 = q_3$ und $d_2e_2 = q_3$. Soll nun die zu einem Schneckenrade ausgebildete Mutter M durch den Wurm W in Umdrehung gesetzt werden, so hat man sich zu denken, dass die Gewinde der Schnecke in einem mittleren Abstände, etwa in w_1 , mit einer in der Richtung w_1w_2 gerichteten Kraft w auf das Zahnrad drücken. Diese einseitige auf das Schneckenrad wirkende Kraft w drückt den Ansatz A_2A_3 der Mutter mit seinem Umfange gegen die Bohrung des Ständers K , und man hat daher die Reaction des letzteren gegen die Mutter M tangential an den Reibungskreis von M und parallel zu w_2w_1 also in mm anzunehmen. Man findet daher w wegen des Gleichgewichtes der beiden auf das Schneckenrad wirkenden Kräftepaare q_3q_3 und ww , wenn man die Schnittpunkte o_1 und o_2 je zweier Kräfte verbindet und $o_2e = d_2e_2 = q_3$ macht, aus dem Parallelogramm o_2egf in $o_2f = w$.

Fig. 28, Taf. IV.

Diese an dem Schneckenrade erforderliche, von dem Wurm auszuübende Umdrehungskraft sei zur Vermeidung zu kleiner Abmessungen in Fig. 28c in fünffacher Vergrösserung

gleich FO angetragen. Es folgt nun weiter, dass diese in der Richtung WW der Schneckenaxe auftretende Widerstandskraft w zu ihrer Bewältigung zunächst eine Umfangskraft p_1 erfordert, welche in w_1 , Fig. 28 b, wirkend daselbst senkrecht zur Ebene der Zeichnung gerichtet ist, und deren Grösse in $FH = p_1$, Fig. 28 c, gefunden wird, wenn man FH senkrecht zu FO und durch O eine Gerade unter dem Winkel $FOH = \alpha_1 + \varphi$ zieht, unter α_1 den Neigungswinkel des mittleren Gewindes der Schnecke gegen deren Querschnittsebene verstanden.

Ferner wird aber die Schnecke W durch die in ihrer Axe wirkende Belastung w gegen das Lager L gedrückt, und es entsteht in einem mittleren Kreise der ringförmigen Stützfläche $L_1 L_2$ eine Reibung, welche man, wie bei der Schraube S in A_2 und A_3 in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten der Kreislinie $L_1 L_2$ wirkend denken kann. Man erhält auch, wie dort, jeden einzelnen dieser beiden, ein Kräftepaar bildenden Reibungswiderstände in $TJ = p_2$, Fig. 28 c, wenn man durch F und O die beiden Geraden FJ und OJ unter dem Reibungswinkel φ gegen OF geneigt zieht.

Endlich wird durch die Belastung w der Schnecke noch ein besonderer Reibungswiderstand in den beiden Halszapfenlagern L und N hervorgerufen; indem die einseitige Wirkung von w die Zapfen mit gewissen Pressungen gegen die Lager drückt, welche Drucke gleich und entgegengesetzt gerichtet sind und die Grösse p_3 haben, die man aus der Momentengleichung entnehmen kann:

$$w \cdot W_1 w_1 = p_3 \cdot LN, \text{ woraus } p_3 : w = W_1 w_1 : LN = LK_1 : K_1 K_2.$$

Aus der letzteren Proportion erkennt man sogleich, dass man p_3 erhält, wenn man in Fig. 28 c durch F eine Parallele mit LK_2 in Fig. 28 b legt, so dass die von jedem der beiden Halslager L und N ausgeübte Reaction p_3 in OK erhalten wird.

Um daher nun die an der Schnecke W , Fig. 28 a, an einer Kurbel in W_3 anzubringende Kraft P zu bestimmen, hat man den einseitigen Widerstand p_1 und die beiden Kräftepaare $p_2 p_2$ und $p_3 p_3$ zunächst zu vereinigen. Dies kann in folgender Weise geschehen. Zunächst lege man an den Reibungskreis des Zapfens L die beiden horizontalen Tangenten l_1 und l_2 für die Reactionsrichtungen von p_3 und ferner im Abstände des mittleren Gewindes der Schnecke von der Axe die verticale Tangente w_3 . Macht man vom Durchschnittspunkte o_3 zwischen w_3 und l_1 nun ferner $o_3 h_1 = p_1$ ($= FH$ in Fig. 28 c) und $o_3 k_1 = p_3$ ($= OK$ in Fig. 28 c), so giebt die Diagonale $o_3 x$ die Resultirende von p_1 und der einen in der Tangente l_1 wirkenden Kraft p_3 . Diese Resultirende weiter mit der anderen in der Tangente l_2 nach der entgegengesetzten Richtung wirkenden Kraft p_3 zusammengesetzt liefert eine durch den Schnittpunkt o_4 gerichtete Kraft, welche parallel und gleich gross ist mit $p_1 = o_3 h_1$. Man erkennt hieraus, dass der Einfluss der beiden Reibungen p_3 , welche durch die Halszapfenreactionen erzeugt werden, darauf hinauskommt, dass der zur Drehung der Schnecke erforderliche Umdrehungswiderstand p_1 seinen Arm vergrössert, indem er in unveränderter Richtung und Grösse von dem Punkte o_3 nach demjenigen o_4 bewirkt wird. Es ist ja übrigens hinreichend bekannt, dass durch Zusammensetzung einer Kraft mit einem Kräftepaare lediglich eine parallele Verlegung der unveränderten Kraft bewirkt wird. In derselben Weise erhält man nun durch die Vereinigung der durch o_4 gehenden Kraft p_1 mit dem Kräftepaare $p_2 p_2$, welches der Reibung an der ringförmigen Stützfläche $L_1 L_2$ in Fig. 28 b entspricht, lediglich eine Versetzung der Kraft p_1 parallel mit sich selbst von o_4 nach o_6 . Dazu hat man nur die Richtungen der beiden Kräfte $p_2 p_2$ (TJ in Fig. 29 c) als zwei parallele Tangenten l_3 und l_4 eines Kreises vom mittleren Durchmesser $L_1 L_2$

zu zeichnen. Trägt man dann vom Schnittpunkte o_5 einer dieser Tangenten mit der verlegten durch o_4 gehenden Kraft p_1 die Längen $o_5 i = p_2$ und $o_5 h_2 = p_1$ ab, so liefert die Diagonale yo_5 in dem Durchschnitte o_6 mit der zweiten Tangente l_4 den Punkt, durch welchen die Kraft p_1 gerichtet anzunehmen ist. Die weitere Construction ist nun bekannt. Durch den Schnittpunkt o_7 des Widerstandes p_1 mit der Kurbelkraft P muss die Reaction der Zapfenlager L resp. N gehen, und man hat, um auch noch der durch P hervorgerufenen Zapfenreibung in L Rechnung zu tragen, die Reactionsrichtung von R tangential an den Reihungskreis von L also in $l_5 o_7$ anzunehmen. Macht man daher schliesslich $o_7 h_3 = p_1$ und zieht durch h_3 eine Parallele mit $o_7 W_3$, so erhält man in $h_3 h_4$ die an der Kurbel in W_3 anzubringende Umdrehungskraft P .

Unter Voraussetzung des Reibungscoefficienten $\varphi = 0,1$ für Zapfen- und Gewindereibung liefert die Construction bei einem Steigungsverhältniss der Schraube S von $n = \tan \alpha = 1/15$ für $Q = 100$, $w = 67$, $w_0 = 11,8$, daher $\eta_1 = \frac{w_0}{w} = 0,176$, wobei unter w wie oben die am Umfange des Schneckenrades erforderliche Kraft verstanden ist. Ferner folgt bei einem Steigungsverhältnisse der Schnecke W von $n = \tan \alpha_1 = 1/10$ für $w = 67$, $P = 12,56$, $P_0 = 4,3$, daher $\eta_2 = \frac{P_0}{P} = 0,342$.

Man hat daher den Wirkungsgrad der ganzen Schraubenwinde in dem vorliegenden Falle zu

$$\eta = \eta_1 \eta_2 = 0,060.$$

In gleicher Weise kann man auch den Wirkungsgrad für die rückgängige Bewegung bestimmen, um die Kraft P_0 zu finden, welche behufs einer Senkung der Last Q im Sinne derselben anzubringen ist.

§. 5.

Die rollende Reibung.

Der Widerstand, welcher sich dem Abwälzen eines Cylinders auf einer ebenen Bahn entgegensetzt, ist von so geringer Grösse, dass er neben den Widerständen der gleitenden und der Zapfenreibung in den meisten Fällen ausser Acht gelassen werden kann. Man pflegt ihn, wenn er doch in Rechnung gestellt werden soll, proportional dem Drucke Q , mit welchem die Walze auf ihre Unterlage drückt, und umgekehrt proportional dem Halbmesser r der Walze anzunehmen. Bei Walzen und Bahnen von Eisen und hartem Holze wird meistens die Formel $P = 0,02 \frac{Q}{r}$ für diesen Widerstand angegeben, für den Fall, dass r in Zollen ausgedrückt ist. Für metrisches Maass kann man daher genügend genau $P = 0,5 \frac{Q}{r}$ setzen, wenn r die Maasszahl des Walzenhalbmessers in Millimetern bedeutet.

Fig. 29, Taf. IV.

Um diesen Widerstand graphisch zum Ausdrucke zu bringen, sei A , Fig. 29, Taf. IV, der Mittelpunkt eines Querschnittes des Cylinders vom Halbmesser $AB = r$, welcher in B von der horizontalen Rollbahn berührt werde. Die in der Axe A wirkend gedachte Belastung des Cylinders, welche man sich etwa durch dessen Eigengewicht ausgeübt denken mag, sei durch die verticale Gerade $AC = Q$ vorgestellt. Zum Fortrollen der Walze ist dann an deren Axe A eine horizontale Karft $P = \varepsilon \frac{Q}{r}$ anzubringen, welche die Grösse AD haben möge. Setzt man auch hier wieder, wie bisher immer geschehen, denjenigen Grenzzustand voraus, für welchen die geringste Vergrösserung von P eine Bewegung veranlasst, so muss für diesen Zustand der Cylinder im Gleichgewichte sein unter Einfluss der auf ihn wirkenden äusseren Kräfte P und Q und der von der festen Bahn auf ihn ausgeübten Reaction R . Dies ist nur möglich, wenn diese Reaction R der Mittelkraft von P und Q gleich und in derselben Geraden entgegengesetzt ist. Die Bahn GG wird daher mit einer Kraft auf den Cylinder wirken, welche der Richtung und Grösse nach durch EA ausgedrückt ist. Da der Cylinder so lange wirklich in Ruhe verbleibt, als die Kraft P einen bestimmten Werth $\varepsilon \frac{Q}{r}$ nicht überschreitet, so muss man, ähnlich wie bei der gleitenden Reibung, annehmen, dass die Bahnfläche GG vermöge ihrer physikalischen Beschaffenheit die Fähigkeit hat, auf den Cylinder mit Kräften zu wirken, welche von der Normale AC um weniger abweichen, als die Gerade EA . Es ergibt sich daher ein ähnliches Verhalten der festen Fläche gegen den wälzenden Cylinder wie gegen einen gleitenden Körper; ein Unterschied jedoch ist in Folgendem begründet. Während der höchstens mögliche Abweichungswinkel der Reaction von der Normale bei der gleitenden Reibung lediglich von der Beschaffenheit des Materials abhängt, bei einem gewissen Materiale daher constant, nämlich gleich dem Reibungswinkel desselben ist, so hängt diese Abweichung bei dem Wälzen ausser von dem Materiale wesentlich von der Form, d. h. der Grösse des Cylinders ab. Aus dem angegebenen Ausdrucke für den Widerstand des Wälzens

$$P = \varepsilon \cdot \frac{Q}{r}$$

erkennt man leicht, dass der Coefficient ε auch eine geometrische Bedeutung hat, denn es folgt daraus

$$Q : r = P : \varepsilon,$$

und dieser Gleichung entspricht in der Figur die Länge $BF = \varepsilon$, d. h. der Abstand, welchen der Angriffspunkt F der Reaction von dem theoretischen Berührungspunkte B zwischen Walze und Bahn höchstens haben kann. Während man es also bei der gleitenden Reibung mit einem constanten Winkel, dem Reibungswinkel φ , zu thun hat, tritt bei der wälzenden Reibung eine lineare Grösse ε auf, welche bei demselben Materiale für Walzen aller Grössen dieselbe bleibt. Man könnte, wenn es von Interesse wäre, die Vergleichung auch noch weiter führen, indem man dem Reibungskegel bei der gleitenden Reibung hier denjenigen keilförmigen Raum FAF_1 zur Seite stellte, dessen Kante die Walzenaxe A ist, und dessen Seitenflächen FA und F_1A die Bahn in dem Abstände ε zu beiden Seiten der normalen Axenebene AB schneiden¹⁾. Es ergibt sich nämlich sogleich, dass bei entgegengesetzter Richtung von P

¹⁾ Ueber den Zusammenhang zwischen der gleitenden und wälzenden Reibung siehe O. Reynolds, Philosophical Transactions, Vol. 166, und Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure. Jahrg. 1877, S. 417.

die Bahn mit einer von der anderen Seite von AB ausgehenden Reaction in der Richtung $F_1 A$ wirken wird.

Man pflegt den hier obwaltenden Zusammenhang oft derart anschaulich zu machen, dass man annimmt, die Walze werde in Wirklichkeit nicht in dem Punkte B , resp. in der durch B gehenden mit der Axe parallelen Geraden, sondern in einer Fläche gestützt, deren Breite zu jeder Seite der normalen Axenebene AB den Werth ε hat, was man sich durch eine geringe Abplattung der Walze unter Einfluss des Druckes Q , verbunden mit einer entsprechenden Eindrückung in die Bahnfläche verdeutlichen kann. Dieser Anschauung entspricht demnach die Annahme des festen Stützpunktes der Walze in dem constanten Abstände ε von der Normalenebene, also in dem Punkte F , und es soll auch in der Folge diese Auffassung festgehalten werden. Die Grösse ε ist nach dem Obigen für Metalle und harte Hölzer gleich 0,02 bis 0,03 Zoll oder ca. 0,5 bis 0,75 Millimeter. Bei nachgiebigem Materiale, z. B. bei weichen Fahrstrassen, kann natürlich ε bedeutend grösser sein, und sind in einzelnen Fällen entsprechende Werthe dafür zu wählen.

Wenn ein Körper KK , Fig. 30, Taf. IV, auf Walzen A fortgezogen werden soll, welche auf der horizontalen Bahn GG rollen, so findet wälzende Reibung sowohl an der Bahn GG wie an dem Körper KK statt. Zieht man daher durch den Mittelpunkt A des Walzenquerschnitts die Normale DB zur Stützfläche, so hat man nach dem Vorstehenden den Stützpunkt der Walze auf der festen Bahn in dem um $BF = \varepsilon$ von B abstehenden Punkte F anzunehmen und ebenso erhält man in dem um $DE = \varepsilon$ von D entfernten Punkte E den Stützpunkt, in welchem der Druck des zu bewegenden Körpers K wirksam zu denken ist. Wenn daher $EC = Q$ die auf die Walze A entfallende Belastung bedeutet, und die in der Ebene KK horizontal wirkende Kraft zum Fortziehen des Körpers mit P bezeichnet wird, so müssen diese beiden Kräfte Q und P mit der Reaction R im Gleichgewichte sein, welche von GG durch die Walze auf den Körper K ausgeübt wird, und welche Reaction die Richtung FE haben muss. Man erhält daher durch das Parallelogramm $ECHJ$ in EJ die zur Bewegung erforderliche Kraft P .

Fig. 30, Taf. IV.

Ebenso bestimmt sich die Kraft P , welche zur Bewegung einer Last Q auf dem Wagenrade AB , Fig. 31, Taf. IV, erforderlich ist, mit Hülfe der Grösse $BF = \varepsilon$ für die wälzende Reibung auf GG und des Reibungskreises für den Zapfen AE , auf welchen die Last Q sich stützt. Die Richtung der Reaction R der Bahn GG gegen das Axenlager des Wagens erhält man somit in der von F aus an den Reibungskreis des Zapfens gelegten Tangente Fa , und daher ergiebt sich die Zugkraft zu $P = DA$, wenn man $AC = Q$ macht und durch C eine Parallele CD mit der Reactionsrichtung Fa zieht.

Fig. 31, Taf. IV.

Die Untersuchung bleibt im Wesentlichen dieselbe, wenn die Bahn GG für das Rad eine beliebige Neigung gegen den Horizont hat, Fig. 32, Taf. IV. Zieht man hierbei durch den Mittelpunkt A der Axe die Gerade AB senkrecht zur Bahn GG , macht $BF = \varepsilon$ und legt durch F die betreffende Tangente Fa an den Reibungskreis von A , so erhält man in dieser Tangente die Richtung für die Reaction der Bahn GG gegen das Axenlager. Wenn man daher $CA = Q$ macht, durch A eine Gerade AE parallel zur Zugkraft P und durch C eine solche CE parallel zur Reaction R zieht, so erhält man in $AE = DC$ die erforderliche Kraft P . Ohne schädliche Widerstände würde die Reaction der Bahn in deren Normale BA gerichtet anzunehmen sein, und man erhielte in D_0C die theoretische Zugkraft P_0 . Aus der Figur folgt für die angenommene Bahnneigung von $1/3$ für $Q = 100$; $P = 34,8$; $P_0 = 33,3$, daher $\eta = \frac{P_0}{P} = 0,957$.

Fig. 32, Taf. IV.

In der hier angegebenen Art bestimmen sich die Widerstände für die verschiedenen Fuhrwerke auf gerader und geneigter Bahn. Ausserdem möge als ferneres Beispiel das Rollenslager eines Drehkrahns, Fig. 33, Taf. IV, noch untersucht werden. Hierbei dient der cylindrische Umfang der festen Krahnsäule A als Bahn für die mit dem Ausleger L verbundenen Rollen B und C . Verbindet man dabei die Mittelpunkte von B und C mit A und macht $FD = GE = \varepsilon$, so liefern die von D und E an die Reibungskreise der Zapfen B und C gezogenen Tangenten Db und Ec die Richtungslinien für die Reactionen R_1 und R_2 der Krahnsäule, welche Richtungen sich in o_1 schneiden. Soll nun die Drehung des Auslegers durch eine nach HJ gerichtete Kraft P geschehen, welche mit dem centralen Drucke Q des Auslegers sich in o_2 schneidet, so hat man in bekannter Weise o_1 mit o_2 zu verbinden, $Io_2 = Q$ zu machen und durch I eine Parallele mit $o_1 o_2$ zu ziehen. Hierdurch erhält man in $o_2 II$ die erforderliche Umdrehungskraft P . Um auch die beiden Reactionen R_1 und R_2 der Krahnsäule gegen die Rollen zu finden, zerlege man die Mittelkraft III nach den Richtungen $o_1 c$ und $o_1 b$, und so erhält man $R_1 = III I$ und $R_2 = II III$. In welcher Weise bei der Drehvorrichtung des Krahns auch der Widerstand zu berücksichtigen ist, welcher an dem Drehzapfen im oberen Theile der festen Krahnsäule auftritt, wird an einem späteren Beispiele gezeigt werden.

Wie schon bemerkt, ist der Widerstand der rollenden Reibung bei den Maschinengetrieben in den meisten Fällen nur ganz unbedeutend gegen die sonstigen Nebenhindernisse.

§. 6.

Die Kettenreibung.

Bei der Aufwicklung von Ketten auf Trommeln oder Rollen sowie bei der Abwicklung von solchen entstehen wegen der Richtungsveränderung der Ketten gewisse schädliche Widerstände, welche sich im Wesentlichen in derselben Weise wie die Zapfenreibung bestimmen lassen. Es sei A , Fig. 34, Taf. IV, der Zapfen einer Kettenrolle, deren Halbmesser $AB = AD$, bis zur Mitte der Kette gerechnet, mit a bezeichnet werde. An dem linksseitig herabhängenden Kettenende BC soll eine Last Q angehängt sein und die Kraft P ermittelt werden, welche an dem anderen Kettenende DE erforderlich ist, um unter Drehung der Rolle in der Richtung des Pfeils ein Heben der Last Q zu bewirken. Sieht man zunächst von der Zapfenreibung an A ab, so erkennt man, dass wegen der Gleichheit der Hebelarme AB und AD auch die Kräfte Q und P für den Gleichgewichtszustand von gleicher Grösse sein müssten, wenn an der Auflaufstelle B und an der Ablaufstelle D der Kette schädliche Widerstände nicht vorhanden wären, wie dies etwa der Fall wäre, wenn die Kette durch einen unendlich dünnen Faden von vollkommener Biegsamkeit ersetzt werden könnte. In diesem Falle würden nämlich bei der Biegung des Fadens wegen dessen unendlich geringer Dicke relative Verschiebungen der einzelnen Fadenelemente gegen einander nicht auftreten, und somit würde auch jeder Anlass zu Nebenhindernissen wegfallen, welche letzteren nach dem im Eingange Bemerkten immer nur da auftreten, wo relative Bewegungen zweier Elemente gegen einander stattfinden. Da aber die Kettenglieder eine gewisse Dicke haben, so wird an der Verbindungsstelle zweier Glieder im Augenblicke des

Auf- oder Ablaufens, also in B und D eine relative Bewegung sich einstellen, welche als eine Drehung aufgefasst werden muss. Denkt man sich irgend ein Kettenglied $B_1 B$ in der aufsteigenden Bewegung von C nach B begriffen, so hat dasselbe gegen das ihm vorangehende Glied $B_2 B_3$, in welches es eingehängt ist, offenbar so lange keine relative Bewegung, als dieses Vorderglied ebenfalls in derselben Geraden CB aufsteigt. In demjenigen Augenblicke indessen, wo das vorangehende Glied $B_2 B_3$ sich dem Umfange der Rolle anschmiegend an deren Bewegung directen Antheil nimmt, findet zwischen diesem Gliede $B_2 B_3$ und dem folgenden $B_1 B$ eine relative Bewegung statt, welche, wie die Figur lehrt, als eine linksläufige Drehung des folgenden Gliedes $B B_1$ gegen das vorangehende $B_2 B_3$ im Sinne des eingezeichneten Pfeiles sich darstellt. Bei dieser Drehung lässt sich das Rundeisen des Gliedes $B B_1$ wie ein Zapfen und die Oese des Gliedes $B_2 B_3$ wie das zugehörige Zapfenlager ansehen. Es ist deshalb nach dem über die Zapfenreibung Gesagten klar, dass nunmehr die beiden Kettenglieder auf einander nur in einer Tangente an den Reibungskreis dieses Zapfens wirken können. Da das Kettenstück CB einer Zugkraft ausgesetzt ist, so erhält man die Richtung dieser Reaction in der Tangente bc , welche den Reibungskreis von B auf der dem Mittelpunkte A abgewendeten Seite berührt; mit anderen Worten, der Hebelsarm der Last Q erscheint durch die Kettenreibung um den Halbmesser $\varkappa$ des Reibungskreises des Ketteneisens vergrößert. In ähnlicher Art wird das Kettenglied $D_2 D_3$ auf der anderen Seite der Rolle beim Verlassen der letzteren gegen das noch auf dem Rollenumfange haftende Glied DD_1 ebenfalls eine linksläufige Drehung im Sinne des Pfeils erleiden. Die Zugkraft P des Kettenstückes ED_2 wird daher auf das Glied DD_1 in der Richtung der verticalen Tangente de an den Reibungskreis von D wirksam sein, d. h. der Hebelarm der Kraft P wird in Folge der Kettenreibung um den Halbmesser $\varkappa$ des Reibungskreises der Kette verkleinert. Die beiden vertical abwärts gerichteten Kräfte Q und P müssen nun mit der von dem festen Zapfenlager A_1 auf den Zapfen A ausgeübten Reaction R im Gleichgewichte sein, und da diese Reaction wegen der Zapfenreibung nur tangential an den Reibungskreis des Zapfens wirken kann, und zwar in der auf der Seite von P gelegenen Tangente fa , so kommt die Untersuchung auf diejenige von zwei parallelen Kräften Q und P hinaus, welche solche Grösse zu einander haben müssen, dass ihre Abstände von der zwischen ihnen gelegenen Mittelkraft beziehungsweise durch $a + \varrho + \varkappa$ und $a - \varrho - \varkappa$ gegeben sind, wenn ϱ den Halbmesser des Reibungskreises für den Zapfen und $\varkappa$ den Halbmesser des Reibungskreises für die Kette bedeuten. Man erhält demgemäss

$$P = Q \frac{a + \varrho + \varkappa}{a - \varrho - \varkappa},$$

welcher Ausdruck sich leicht construirt, indem man an beliebiger Stelle die Horizontale GH zieht, GK gleich Q macht, KJ ebenfalls horizontal zeichnet und von J durch L bis M zieht. Man erhält dann in $MG = NH$ die erforderliche Zugkraft P und in KM die Reaction des Lagers $R = P + Q$.

Da die Kettenglieder im Allgemeinen im trockenen Zustande sich auf einander reiben, so pflegt man als Reibungscoefficienten in der Regel den Werth $\mu_1 = 0,2$ anzunehmen. Unter Annahme dieser Zahl und für den Reibungscoefficienten am Zapfen $\mu = 0,1$ erhält man aus der Figur für $Q = 100$; $P = 105$, und da $P_0 = Q = 100$ ist, so folgt für die feste Rolle, Fig. 34, der Wirkungsgrad $\eta = \frac{P_0}{P} = 0,952$.

Fig. 35, Taf. IV. Die Untersuchung bleibt dieselbe, auch wenn die beiden Kettenrichtungen nicht parallel sind. Für die Leitrolle ABC z. B., Fig. 35, Taf. IV, zeichnet man zunächst die Mittellinien OB und OC der Ketten und damit parallel die Wirkungslinien ob und oc der Kettenzüge. Alsdann erhält man in der vom Durchschnittspunkte o dieser Richtungen an den Reibungskreis von A gelegten Tangenten ao die Richtung der Lagerreaction, so dass man, wenn oI gleich Q gemacht und II parallel zu oc gezogen wird, in II die Kraft P und in oII den Zapfendruck in A erhält. Für $\mu = 0,1$ und $\mu_1 = 0,2$ erhält man aus der Figur für $Q = P_0 = 100$; $P = 104,4$, daher $\eta = \frac{P_0}{P} = 0,958$.

Fig. 36, Taf. IV. In derselben Art bestimmt sich die Reibung bei der Unterstützungsrolle einer Kette, Fig. 36, Taf. IV, wie sie z. B. bei Kränen häufig Anwendung finden. Zeichnet man hierbei die (in der Figur durch gebrochene Linien dargestellten) Richtungen BF und BE , unter welchen die Kette auf- und abläuft, und legt dazu parallel und im Abstände gleich dem Reibungshalbmesser κ des Ketteneisens die Zugrichtungen od und oc , so ist die Reaction R des Zapfenlagers von A durch die vom Schnittpunkte o an den Reibungskreis von A geführte Tangente ao gegeben. Macht man daher oI gleich der an der Kette BD wirkenden Widerstandskraft Z_1 und zieht durch I die Parallele III mit oc , so erhält man in III die Kraft Z_2 , welche an dem Kettenende BC angebracht werden muss.

Fig. 37, Taf. IV. Bei der losen Rolle, Fig. 37, Taf. IV, an deren Zapfen A die Last Q hängt, und deren eines Kettenende bei D befestigt ist, soll man die an dem anderen Kettenende CE vertical aufwärts wirkende Kraft P ermitteln. Hierzu zieht man die Zugrichtungen bd und ce parallel zu den Ketten in dem Abstände κ des Reibungshalbmessers der Ketten und zeichnet die verticale Tangente ag an den Reibungskreis von A . Alsdann zieht man an beliebiger Stelle, etwa durch die Zapfenmitte, die horizontale Gerade BAC , macht AG gleich der Last Q , zieht durch G die Linie b_1c_1 parallel mit BC , verbindet B mit c_1 und zieht durch H die Gerade JK parallel mit BC . Dann erhält man, wie leicht zu erkennen ist, in $c_1K = b_1J$ die Spannung Z des festen Kettenendes und in KC die an dem Kettenstücke CE anzubringende Zugkraft P .

Fig. 38, Taf. V. Vermittelst der Reibungskreise für die Zapfen und Ketten, deren Halbmesser wie bisher beziehungsweise durch ρ und κ bezeichnet werden sollen, lassen sich die Kraftverhältnisse auch für alle Arten von Flaschen- und Rollenzügen sehr einfach ermitteln, und es mögen einige Beispiele zur Erläuterung dienen. Die Fig. 38, Taf. V gilt für einen gewöhnlichen Flaschenzug mit zwei Flaschen, von denen jede drei Kettenrollen von gleicher Grösse neben einander auf dem Bolzen A resp. B enthält. Es ist zunächst deutlich, dass die an dem Lasthaken H hängende Last auf den Zapfen B der unteren Flasche in der an den Reibungskreis von B gezeichneten verticalen Tangente (links) o_2b wirkt, während die durch die Oese G auf den oberen Bolzen A ausgeübte Reaction in der Tangente o_1a (rechts) an den Reibungskreis von A wirksam ist, wenn die Rollen behufs einer Hebung der Last in der durch die Pfeile angedeuteten Richtung gedreht werden müssen, d. h. wenn die Ketten bei E und D auflaufen und bei F und C sich von den Rollen abwickeln. Demgemäss werden die Zugkräfte der einzelnen Ketten an den Ablaufstellen C und F um die Grösse κ den Rollenmitten sich nähern und an den Auflaufstellen E und D um dieselbe Grösse κ sich von den Zapfenmitten entfernen. Da die untere ganz frei schwebende Flasche an einer seitlichen Bewegung nicht gehindert ist, so wird in Folge der vertical wirkenden Last Q sofort beim Beginne der Bewegung die Flasche B sich so weit seitlich, nämlich um 2κ nach links verschieben, dass die Zugrichtungen der Ketten ebenfalls vertical sind,

denn nur dann ist das Gleichgewicht möglich. In der Figur ist eine solche seitliche Verschiebung der Flasche B vorausgesetzt, bei welcher die Zapfenmitten von A und B nun nicht mehr vertical über einander liegen, welche letztere Stellung nur für den Zustand der Ruhe sich einstellt. Es ist übrigens deutlich, dass bei der entgegengesetzten Bewegung, also beim Niederlassen der Last eine entsprechende seitliche Verschiebung der Flasche B nach der entgegengesetzten Seite eintreten muss. Man bezeichne nun die Spannungen der einzelnen Kettenstücke mit $Z_1, Z_2, Z_3 \dots Z_7$, derart, dass Z_1 die Spannung der ersten Kette bedeutet, welche an der festen Flasche A hängt und bei E auf die erste Rolle der unteren Flasche läuft, während Z_7 die Kraft ist, welche an dem freien Kettenende anzubringen ist, um die Hebung von Q zu veranlassen. Es ist nach dem Vorhergehenden dann klar, dass für das Verhältniss je zweier auf einander folgenden Kettenspannungen die Beziehung gilt

$$Z_n (r + \varrho + \varkappa) = Z_{n+1} (r - \varrho - \varkappa),$$

wenn r den Halbmesser der Rollen bis zur Kettenmitte bedeutet.

Zieht man nun an beliebiger Stelle eine Horizontale, welche die Richtungen ce und fd der Kettenspannungen in J und K und die Richtungen der Zapfenreactionen in o_1 und o_2 schneidet, so erkennt man aus der Figur, dass $JK = 2r$; $Jo_1 = o_2K = r - \varrho - \varkappa$ und $Jo_2 = o_1K = r + \varrho + \varkappa$ ist. Mit Rücksicht hierauf folgt nunmehr ohne Weiteres zur Ermittlung von Z_7 oder P folgende Construction: Man macht JI gleich der Spannung des ersten Kettenstückes Z_1 , zieht von I durch o_1 eine Gerade, welche in KII die Spannung Z_2 des zweiten Kettenstückes liefert. Von II zieht man durch o_2 bis III und erhält in $JIII$ die Spannung Z_3 . In derselben Art liefern dann die Geraden $IIIo_1IV$, IVo_2V , Vo_1VI und VIo_2VII die übrigen Kettenspannungen:

$$Z_4 = KIV, Z_5 = JV; Z_6 = KVI \text{ und } Z_7 = JVII.$$

Die zu hebende Last Q ist dadurch gegeben, dass $Q = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6$ ist, und in Z_7 hat man die Zugkraft P am freien Kettenende gefunden. In der Figur ist die Summe der Spannungen Z_1 bis Z_6 als NL aufgetragen, $MO = Z_7$ ist die Kraft P . Bei dieser hier gewählten Construction wurde von Z_1 ausgegangen, in Wirklichkeit wird nun Z_1 von vornherein noch unbekannt sein, da in der Regel Q gegeben ist, doch führt das gewählte Verfahren immer in einfacher Weise zum Ziele. Man kann nämlich $Z_1 = JI$ von einer ganz beliebigen Grösse wählen und erhält in angegebener Art die Strecken $NL = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6$ und $MO = Z_7$. Nun findet man aus der gegebenen Belastung Q nach dem Verhältnisse dieser Strecken NL und MO die Kraft $P = Q \frac{MO}{NL}$, was im Wesentlichen nur auf die Annahme eines geeigneten Kräftemaassstabes hinausläuft. Dagegen würde eine direct von Q ausgehende Construction zu ganz unnöthigen Weitläufigkeiten führen.

Die hier gefundene Construction behält auch für den Rückwärtsgang des Flaschenzugs ihre Gültigkeit, wenn man sich nur vergegenwärtigt, dass hierbei die am freien Kettenende anzubringende Kraft P , welche das beschleunigte Niedersinken der Last Q hindern soll, als erste Kettenspannung zu betrachten ist, und dass jede folgende Spannung in demselben Verhältnisse $\frac{r + \varrho + \varkappa}{r - \varrho - \varkappa}$ sich vergrössert. Betrachtet man daher jetzt die Strecke JI als (P) oder Z_7 , so erhält man durch dieselbe Construction die Spannungen $Z_6, Z_5 \dots Z_1$, von denen jede folgende grösser wird, so dass die Spannung Z_1 des an der festen Flasche A angehängten Ket-

tenstückes nunmehr die grösste ist. Auch hier ist $Q = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6$ und $Z_7 = (P)$. In der Figur ist die Summe von Z_1 bis Z_6 gleich SR aufgetragen und dazu $(P) = Z_7 = TU$ gehörig.

Die Figur ergibt für den Vorwärtsgang bei $Z_1 = 100$; $Q = 682,7$, $P = 134,6$ und da $P_0 = \frac{Q}{6} = 113,8$ ist, so folgt $\eta = \frac{P_0}{P} = 0,845$.

Für den Rückgang erhält man für $Z_7 = (P) = 100$; $Q = 717,4$, und da $P_0 = \frac{Q}{6} = 119,6$ sein würde, so bestimmt sich der Wirkungsgrad des Rückganges zu $(\eta) = \frac{(P)}{P_0} = 0,837$.

Wenn die Rollen des Flaschenzuges nicht von gleicher Grösse, daher die einzelnen Kettenstücke nicht parallel sind, wie dies der Fall ist, wenn die Rollen in den Flaschen auf verschiedenen Bolzen über einander angeordnet sind, so wird zwar wegen der geringen Divergenz der Ketten die vorstehende Untersuchung für parallele Ketten in den meisten Fällen genügende Genauigkeit ergeben, doch kann man eine schärfere Bestimmung in solchem Falle unter Berücksichtigung der Durchschnittspunkte je zweier Kettenrichtungen vornehmen. In welcher Art dies zu geschehen hat, wird das Beispiel des Rollenzuges, Fig. 40, Taf. V, lehren.

Fig. 39, Taf. V.

Zunächst möge der Differentialflaschenzug, Fig. 39, Taf. V, betrachtet werden. Auch hier wirkt die an dem Haken H hängende Last Q in der Richtung der verticalen Tangente bh an den Reibungskreis von B , während die Reaction der Oese G auf den Zapfen A in die Tangente ag des Reibungskreises von A hineinfällt. Die Spannung Z_1 des bei C von der oberen kleinen Rolle ablaufenden und bei E auf die lose Rolle auflaufenden Kettenstückes ist wieder ihrer Richtung nach durch ce gegeben, ebenso wie die Gerade fd die Richtung der Spannung Z_2 des bei F ablaufenden und bei D auflaufenden Kettenstückes bestimmt. Diese beiden Spannungen Z_1 und Z_2 , welche man bei der gewöhnlichen Anordnung des Differentialflaschenzuges genügend genau als parallel annehmen kann, stehen wieder in der gegenseitigen Beziehung

$$Z_2 (r - \varrho - \varkappa) = Z_1 (r + \varrho + \varkappa),$$

unter r den Halbmesser der losen Rolle EF verstanden, und man hat $Q = Z_1 + Z_2$.

Zieht man daher durch einen beliebigen Punkt o der Richtung fd eine zu letzterer senkrechte Gerade oM und macht MI gleich Q , so erhält man in dem Durchschnittspunkte b_2 der Geraden oI mit der Richtung b_1b der Last Q einen Punkt, welcher das Verhältniss von Z_1 und Z_2 ergibt, denn man hat, wenn man durch b_2 die Horizontale b_2N zieht:

$$b_1b_2 : NI = ob_1 : b_1M = r - \varrho - \varkappa : r + \varrho + \varkappa,$$

woraus man erkennt, dass

$$b_1b_2 = MN = Z_1 \text{ und } NI = Z_2$$

ist.

Diese beiden in c und d an der oberen Rolle angreifenden Kräfte Z_1 und Z_2 müssen mit dem an dem freien Kettenende JK in der Richtung ik angreifenden Kettenzuge Z_3 oder P und der von dem Zapfen A in der Richtung ag ausgeübten Reaction R im Gleichgewichte sein. Für diese parallelen Kräfte findet man die Bedingungen des Gleichgewichtes am einfachsten durch die Zeichnung eines Seilpolygons. Man betrachte zu dem Ende o als den Pol des Kräftepolygons MNI , ziehe durch ξ die Geraden $\alpha\xi$ parallel mit oM und $\beta\xi$ parallel mit oN , sodann durch β die Linie $\beta\gamma$ parallel mit oI , dann erhält man nach den bekannten Eigenschaften des Seilpolygons in der Verbindungslinie $\alpha\gamma$ die Richtung des Polstrahls oII , welcher

in III die Zugkraft P an der Kette in i und in $IIIM$ die Reaction des Zapfens A gegen die Rolle liefert.

Die theoretische Betriebskraft P_0 lässt sich durch eine ähnliche Construction finden, man kann dieselbe einfacher durch Construction des bekannten Ausdruckes $P_0 = Q \frac{R_1 - R_2}{2 R_1} = Q \frac{AD - AL}{DJ}$ finden. Um auch für den Rückgang des Flaschenzuges die Kraftverhältnisse zu untersuchen, hat man nur zu berücksichtigen, dass die Kettenspannungen und Zapfenreactionen bei der entgegengesetzten Bewegung in diejenigen Richtungen hineinfallen, welche in der Figur durch abgerissene Linien (Striche und Punkte) angedeutet sind. Auch für den Rückgang ist $Q = (Z_1) + (Z_2)$, nur ist jetzt

$$(Z_2) (r + \varrho + \varkappa) = (Z_1) (r - \varrho - \varkappa),$$

daher die Spannung (Z_1) der Kette CE gerade so gross ist, als die Spannung Z_2 der Kette FD beim Vorwärtsgange, und ebenso ist $(Z_2) = Z_1$. Macht man daher im Kräftepolygon $M(N) = NI$ und zieht den Polstrahl $o(N)$, so kann man ebenso wie beim Vorwärtsgange das Seilpolygon $(\alpha)(\xi)(\beta)(\gamma)$ für den Rückwärtsgang verzeichnen, indem man $(\alpha)(\xi)$ parallel oM , $(\beta)(\xi)$ parallel $o(N)$ und $(\beta)(\gamma)$ parallel oI zieht. Man erhält dann in $(\alpha)(\gamma)$ die Schlusslinie des Seilpolygons und durch den hiermit parallel gezogenen Polstrahl $o(II)$ die zur rückgängigen Bewegung in J anzubringende Kraft (P) durch die Strecke $I(II)$. Da diese Kraft hier nach oben gerichtet ist, so ist hierdurch ausgesprochen, dass der Flaschenzug von selbst eine rückgängige Bewegung nicht annehmen kann, dazu vielmehr eine Kraft $(P) = I(II)$ an J angebracht werden muss, welche im Sinne der sinkenden Last Q zu wirken hat.

Die Figur liefert unter Annahme von $\mu = 0,1$ für die Zapfenreibung und $\mu_1 = 0,2$ für die Kettenreibung und einem Verhältnisse von $\frac{R_1}{R_2} = \frac{AD}{AL} = \frac{10}{9}$ für $Q = 100$; $P = 12,8$ und $(P) = -2,7$. Da hierfür $P_0 = 5$ ist, so hat man den Wirkungsgrad für den Vorwärtsgang $\eta = \frac{P_0}{P} = 0,391$ und für den Rückgang $(\eta) = \frac{(P)}{P_0} = -0,54$.

Als ein fernerer Beispiel möge noch ein Rollenzug untersucht werden, wie derselbe bei hydraulischen Aufzugvorrichtungen¹⁾ öftere Verwendung findet. Hierbei ist die Kette, an welcher die zu hebende Last Q hängt, zunächst über die beiden etwa im Dachgebälk gelagerten Leitrollen A und B geführt, Fig. 40, Taf. V, worauf die Kette in einer herabhängenden Schleife die lose Rolle C trägt, so dass das Kettenende nach seiner Umführung um die feste Rolle D mit dem Zapfenlager des Zapfens C verbunden ist. Unter der Voraussetzung, dass die einzelnen Ketten nahezu parallel seien, würde vermöge dieser Verbindung eine verticale Abwärtsbewegung der losen Rolle C die Last Q zu einer genau dreimal so grossen Erhebung veranlassen. Dieses Niederziehen der Rolle C geschieht nun mit Hülfe einer zweiten Kette, deren eines Ende den Zapfen von C mit einem Auge umfasst, und welche in ähnlicher Art wie die erstgedachte Kette in einer Schleife die lose Rolle E trägt, an deren Zapfen wiederum das andere Ende der um die feste Rolle F geschlungenen Kette befestigt ist. Die Bewegung der Axe E geschieht mit Hülfe der verticalen Kolbenstange eines hydraulischen Hebeylinders, welcher in der Figur, als für die

Fig. 40, Taf. V.

¹⁾ S. u. A. Weisbach, Ingenieur- und Maschinenmechanik, III. Th. Rühlmann, Allgem. Maschinenlehre. IV. Bd.

vorliegende Untersuchung unwesentlich, nicht besonders gezeichnet ist. Bei parallelen Kettenrichtungen würde eine verticale Abwärtsbewegung dieser Rolle E , wie sie durch den Hebekolben bewirkt wird, ebenfalls eine dreimal vergrösserte Senkung der Rolle C und daher eine Hebung der Last Q in dem neunfachen Betrage der Kolbenbewegung zur Folge haben. Ohne schädliche Nebenhindernisse würde daher auch die Kolbenkraft P_0 gleich $9 Q$ sein müssen, und es ergibt sich ohne Weiteres, dass derartige Rollenzüge sich insbesondere für solche Hebevorrichtungen eignen werden, wo wie bei hydraulischen Vorrichtungen der Weg der Betriebskraft P nur mässige Grösse haben kann, während die Betriebskraft in der erforderlichen Stärke vorhanden ist. Das oben angegebene Umsetzungsverhältniss zwischen den Wegen der Kraft und Last, welches unter der Voraussetzung paralleler Ketten sich einstellt, wird in der Wirklichkeit wegen des nicht vollkommen genauen Parallelismus zwar nur wenig sich ändern, es soll jedoch die Untersuchung mit Rücksicht auf die gegen einander geneigten Kettenrichtungen allgemein durchgeführt werden, um die Art der Untersuchung in solchen Fällen zu erläutern.

Die Richtungslinien der von den einzelnen Kettenstücken geäusserten Zugkräfte $Z_1 Z_2 \dots Z_7$ können zunächst leicht angegeben werden, wenn man an allen Auflaufpunkten, also bei A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 und F_1 den Hebelarm um den Halbmesser α der Kettenreibung vergrössert und dagegen an allen Ablaufpunkten, also bei $A_2, B_2 \dots F_2$, den Hebelarm um ebenso viel verkleinert.

Der Zapfen A der ersten festen Leitrolle wird von seinem Lager eine Reaction R_1 in der Richtung der Tangente von o_1 an den Reibungskreis von A erleiden, welche gefunden wird, wenn man OI gleich Q macht, durch O eine Parallele zu $o_1 a$ und durch I eine solzhe zu $o_1 o_2$ zieht. Man findet dann den Kettenzug in $a_2 b_1$ zu $Z_1 = I II$. Ebenso reagirt das Lager auf den Zapfen B der zweiten Leitrolle in der Richtung $b o_2$, daher wird eine Zerlegung der Kettenkraft $Z_1 = I II$ nach den Richtungen von $b o_2$ und $o_2 o_3$ in $I III$ den Kettenzug Z_2 des Stückes $B_2 C_1$ liefern, und ist $III II$ die Reaction R_2 des Lagers von B . Auf die lose Rolle wirken nun vier Kräfte und zwar der Kettenzug Z_2 in der Richtung $o_3 o_2$, der Zug Z_3 des Kettenstückes $C_2 D_1$ in der Richtung $o_3 d_1$, der Zug Z_4 des Kettenendes in der Richtung $o_3 d_2$ und endlich der Zug Z_5 des Kettenanfangs der zweiten Kette in der Richtung ce_1 . Die Richtungslinien für die beiden zuletzt angeführten Kräfte Z_4 und Z_5 müssen offenbar tangential an den Reibungskreis von C gerichtet sein. Z_2 und Z_3 schneiden sich in o_3 , und Z_4 schneidet sich mit Z_5 in o_4 . Die Verbindungslinie $o_3 o_4$ muss daher die Mittelkraft sowohl von Z_2 und Z_3 wie auch diejenige von Z_4 und Z_5 aufnehmen. Zieht man daher im Kräftepolygon durch I und III die Parallelen $I IV$ und $III IV$ mit $o_3 o_4$ und mit $C_2 d_1$, so erhält man Z_3 gleich $III IV$ und in $IV I$ die Mittelkraft von Z_2 und Z_3 . Eine Zerlegung dieser letzteren Mittelkraft $IV I$ nach den Richtungen $IV V$ parallel zu $d_2 o_5$ und $I V$ parallel zu ce_1 liefert daher in $V IV$ die Kettenspannung Z_4 zwischen C und D_2 und in $I V$ die Zugkraft Z_5 , welche von der unteren Kette auf den Zapfen der losen Rolle C ausgeübt werden muss. Auch findet sich die Reaction des Lagers gegen den Zapfen D der festen Rolle als Mittelkraft von Z_4 und Z_3 in der Strecke $V III$.

In derselben Weise schliesst man nun weiter, dass die vier auf die zweite lose Rolle E wirkenden Kräfte Z_5, Z_6, Z_7 und P im Gleichgewichte sein müssen. Hiervon wirken die Kräfte Z_5 in ce_1 und Z_6 in $f_1 e_2$, ihr Durchschnittspunkt ist o_6 , während die Kettenspannung Z_7 und die Kolbenkraft P tangential an den Reibungskreis von E gerichtet sind; diese Kräfte schneiden sich in o_7 . Die Gerade $o_6 o_7$ giebt daher wieder die Richtung der Mittelkraft von Z_5 und Z_6 , sowie von Z_7 und P an. Man ziehe daher durch I die Gerade $I VI$ parallel zu $o_6 o_7$ und $V VI$

parallel zu $f_1 e_2$, um in $VI V$ die Kettenspannung Z_6 zwischen E_2 und F_1 zu erhalten, während $VI I$ die Mittelkraft von Z_5 und Z_6 bedeutet. Zerlegt man daher diese Kraft $VI I$ nach $VI VII$ parallel zu Z_7 oder $f_2 o_8$ und nach $I VII$ parallel mit P , so erhält man in der letzterhaltenen Strecke $I VII$ die von dem Hebekolben auszuübende Zugkraft P . Die Reaction des Zapfenlagers der festen Rolle F ist wieder durch $VII V$ als Mittelkraft von Z_6 und Z_7 gefunden.

Bei derartigen Rollenzügen sind in den meisten Fällen die Richtungen der Kettenkräfte nur wenig von einander verschieden, so dass die Durchschnittspunkte o derselben oft ausserhalb der Grenzen der Zeichnung fallen. In welcher Weise man in solchen Fällen die Zeichnung auch ohne directe Kenntniss des Schnittpunktes mittelst einer Hilfsconstruction durchführen kann, ist bereits früher bei Gelegenheit des durch Fig. 19, Taf. II dargestellten Beispiels näher angegeben worden. In dieser Art hätte man auch in dem vorliegenden Falle zu verfahren, wenn die Durchschnittspunkte o_3 , o_5 , o_6 und o_8 ausserhalb der Zeichnung gelegen sein würden. Mit einer annähernd parallelen Lage der Ketten stellt sich ferner bei der Verzeichnung des Kräftepolygons der Uebelstand ein, dass die Durchschnittspunkte zweier nur wenig divergirenden Richtungen sich nicht mit der gewünschten Genauigkeit zeichnen lassen. Um daher in solchem Falle doch die erforderliche Schärfe zu erlangen, kann man sich etwa folgender Hilfsconstruction bedienen. Soll die Kraft $Z_2 = I III$ nach den Richtungen $III IV$ parallel Z_3 und $I IV$ parallel zu $o_3 o_4$ zerlegt werden, so denke man zu dem System dieser Kräfte in irgend einer Geraden, etwa in $C_1 C_2$, zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ hinzugefügt, wodurch an dem Gleichgewichte nichts geändert wird. Denkt man sich $\alpha\beta$ gleich Ia aufgetragen und mit $Z_2 = III I$ vereinigt, so hat man für beide Kräfte die Resultirende $IIIa$ der Richtung und Grösse nach. Vereinigt man ebenso die entgegengesetzte Kraft $\alpha_1\beta_1$ mit der noch unbekannten Kraft Z_3 , so entsteht aus dieser Vereinigung eine andere Resultirende, deren Richtung sich angeben lässt. Denn die Resultirende von Z_2 und $\alpha\beta$ muss mit der Resultirenden von Z_3 und $\alpha_1\beta_1$ eine Gesamtmittelkraft geben, welche in $o_3 o_4$ hineinfällt. Zieht man daher durch α eine Parallele zu $IIIa$ bis zum Schnittpunkte ω mit $o_3 o_4$, so muss durch diesen Durchschnitt ω auch die Resultirende von Z_3 und $\alpha_1\beta_1$ hindurchgehen, deren Richtung ist also durch $\omega\alpha_1$ gegeben. Wenn man daher in dem Kräftepolygon die Kraft $IIIa$ nach den Richtungen $o_3 o_4$ und $\omega\alpha_1$ zerlegt, indem man das Dreieck $IIIa\alpha_1$ über $IIIa$ zeichnet, so erhält man in α_1 einen mit hinreichender Schärfe zu bestimmenden Schnittpunkt, welchen man nun auf die durch I mit $o_3 o_4$ parallele Gerade nach IV übertragen kann, indem man $\alpha_1 IV$ parallel zu αI , also zu $\alpha\beta$ zieht. Die Grösse der hinzugefügt gedachten Kräfte $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ ist hierbei ganz beliebig zu wählen; man wird sie so annehmen, dass die betreffenden Richtungen, welche den gesuchten Schnitt bestimmen sollen, hinreichend divergiren, um ihren Durchschnitt genügend scharf bestimmen zu können.

In der Figur ist in ähnlicher Art die Bestimmung des Durchschnittes VI durch Hinzufügung zweier gleichen und entgegengesetzten Kräfte in der Geraden $E_1 E_2$ angedeutet. Anstatt hierbei die Kraft $Z_5 = VI I$ direct nach den Richtungen $o_6 o_7$ und Z_6 zu zerlegen, ist hier die Kraft Vd für Z_5 gesetzt, und dem entsprechend die Zerlegung nach $o_6 o_7$ und $\omega_1 d_1$ angenommen werden.

In dieser und ähnlicher Art wird man bei der Zeichnung der Diagramme in den meisten Fällen Hilfsconstructionen angeben können, welche eine scharfe Bestimmung der Schnittpunkte auch bei Richtungen ermöglichen, welche nur geringe Divergenz zeigen.

In der Figur ist für $Q = 100$, $P = 1295$ gefunden, und da bei Annahme paralleler Ketten, d. h. also bei neunfacher Uebersetzung $P_0 = 9Q = 900$ ist, so folgt hieraus ein Wirkungsgrad der untersuchten Hebevorrichtung von $\eta = \frac{P_0}{P} = 0,695$. In diesem Werthe sind selbstredend diejenigen Widerstände nicht berücksichtigt, welche in dem Hebecylinder vorkommen. Letztere werden in jedem Falle noch durch eine besondere Untersuchung zu ermitteln sein, und insbesondere hat man zu der gefundenen Zugkraft P noch denjenigen Betrag hinzuzufügen, welcher der Reibung der Kolben- und Stopfbüchsenliderung entspricht, um den Betrag des auf den Kolben vom Accumulator auszuübenden Wasserdruckes zu erhalten.

Eine Untersuchung der rückgängigen Bewegung dieser Vorrichtung hätte unter Berücksichtigung der Eigengewichte der Ketten, losen Rollen und des Kolbens in ähnlicher Art stattzufinden, und man würde in der am freien Kettenende A_1 erforderlichen Zugkraft, welche zum leeren Rückgange vorhanden sein muss, die Grösse des Gegengewichtes finden, welches bei derartigen Aufzügen in der Regel mit dem Lasthaken verbunden zu werden pflegt, wenn nicht schon durch das Eigengewicht einer etwa angeordneten Plattform oder Förderschale der selbstthätige Rückgang veranlasst wird.

§. 7.

Die Seilsteifigkeit.

Bei dem Auf- und Abwickeln biegsamer Seile und Schnüre auf und von Rollen und Trommeln stellt sich erfahrungsmässig ebenfalls ein schädlicher Widerstand ein, welcher zum Theil aus einer Reibung der einzelnen Fasern dieser Organe bei ihrer Biegung, zum Theil aus dem Widerstande resultirt, welchen die Fasern einer Dehnung resp. Zusammendrückung entgegenzusetzen. Man kann diesen Widerstand der Seile genau in derselben Weise in Anrechnung bringen, wie denjenigen der Kettenreibung, indem man annimmt, dass in Folge der Seilsteifigkeit der Hebelarm der Zugkraft des auflaufenden oder Lastseils um eine gewisse Grösse vergrössert, der Hebelarm des ablaufenden Seiles, an welchem die Kraft wirkt, um eine gewisse Grösse verringert wird. Welchen Werth diese Grössen haben, die man in der Regel für das auf- und ablaufende Seil gleich gross annimmt, hat natürlich nur durch Versuche ermittelt werden können, und die aus solchen Versuchen abgeleiteten Resultate sind mehrfach durch empirische Formeln¹⁾ zum Ausdruck gebracht worden. Aus diesen Versuchen hat sich im Allgemeinen ergeben, dass der Widerstand der Seilsteifigkeit proportional der Seilkraft ist, ferner mit dem Rollenhalbmesser im umgekehrten Verhältnisse steht, dagegen mit der Seildicke d zunimmt, und zwar nicht im einfachen Verhältnisse mit dieser Dicke, sondern in einer höheren Potenz. Meistens nimmt man, für Hanfseile wenigstens, an, dass der Widerstand der Seilsteifigkeit im quadratischen Verhältnisse mit der Seildicke wächst, und setzt daher diesen Widerstand

¹⁾ Vergl. u. A. Weisbach, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. Th. I.

$$S = k \frac{d^2}{r} Z,$$

worin Z die von dem Seile auszuübende Zugkraft und k eine Erfahrungsconstante ist.

Dass der Widerstand der Seilsteifigkeit sich in der That auf eine Vergrößerung resp. Verkleinerung des Hebelarmes der Last Q und der Kraft P zurückführen lässt, kann man sich in folgender Weise deutlich machen. Es sei A , Fig. 41, Taf. V, der Mittelpunkt einer Seilrolle und $AB = AC = r$ der Halbmesser derselben bis zur Axe des Seiles gemessen. Eine an dem Seile bei D hängende Last Q ruft in den Elementen des Seilquerschnittes gewisse Zugspannungen hervor, welche man gleichmässig über den Querschnitt vertheilt denken kann, so dass die Resultirende Z aller dieser elementaren Spannungen im Mittelpunkte M des Querschnittes angreift, also in die geometrische Axe BD des geraden Seilstückes hineinfällt. Das Seilstück BD wird daher im Zustande der Ruhe, so lange eine Drehung der Rolle durch eine Kraft nicht angestrebt wird, eine solche Stellung annehmen, dass die Krafrichtung von Q durch den Mittelpunkt M des Querschnittes B hindurchgeht. Denkt man nun eine äussere Kraft an der Rolle angebracht, welche die letztere in der Richtung des Pfeiles umzudrehen und damit eine Aufwicklung des Seiles bei B zu bewirken bestrebt ist, so wird das Seil an dieser Stelle B einer Biegung unterworfen, bei welcher bekanntlich nur die mittleren Fasern in der sogenannten neutralen Schicht $M_1 M_2$ ihre ursprüngliche Länge beibehalten, während alle nach aussen gelegenen Fasern der Querschnittshälfte $M_1 M_2 O$ einer Dehnung durch Zug, alle nach innen gelegenen Fasern der Querschnittshälfte $M_1 M_2 J$ einer Verkürzung durch Zusammendrückung ausgesetzt sind. Durch diese Dehnung wird jeder Faser in OM ausser der schon durch Q in ihr erzeugten Anspannung noch eine gewisse elastische Spannung σ ertheilt, welche dem Abstände dieser Faser von der neutralen Schicht $M_1 M_2$ proportional ist. Man kann sich diese Spannungen für alle Elemente der Querschnittshälfte $M_1 M_2 O$ zu einer Resultirenden s vereinigt denken, welche etwa in dem Punkte α ihren Angriffspunkt haben möge. Ebenso wird jede Faser der inneren Querschnittshälfte $M_1 M_2 J$ einer gewissen Zusammenpressung unterworfen, welche ebenfalls dem Abstände der Faser von der neutralen Schicht $M_1 M_2$ proportional ist, und wenn man auch diese Pressungen zu einer Mittelkraft zusammensetzt, so erhält man eine etwa in dem Punkte β angreifende Druckkraft p . Bei der Biegung steifer Körper, wie Balken, ist bekanntlich $s = p$ zu setzen, doch ist es nicht nöthig, diese Annahme hier zu machen. Man erkennt aus der vorstehenden Betrachtung, dass das Seilstück BD , welches von der äusseren Kraft Q bei D angegriffen wird, in dem Querschnitte durch B dreien Einwirkungen unterworfen ist, und zwar einer im Mittelpunkte B nach oben wirkenden Spannung Z , ferner der ebenfalls vertical aufwärts gerichteten s in α und der vertical abwärts wirkenden Kraft p in β . Diese drei Kräfte müssen zusammen eine Mittelkraft haben, welche der Kraft Q gleich und in derselben Geraden entgegengesetzt ist. Es ist aber leicht zu erkennen, dass die Mittelkraft S von Z , s und p , welche also gleich Q sein muss, jedenfalls einen grösseren Abstand von A haben muss als der Mittelpunkt B des Seilquerschnittes, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man zuerst Z mit s vereinigt und die Mittelkraft dieser beiden dann mit p zusammensetzt. Die Mittelkraft von Z und s liegt wegen der übereinstimmenden Richtung zwischen B und α , also in grösserem Abstände von der Axe A als der Rollenhalmesser beträgt, und durch Vereinigung dieser Mittelkraft mit der entgegengesetzt gerichteten Pressung p rückt der Angriffspunkt b der Gesamtmittelkraft S noch weiter hinaus. Es möge der Abstand Bb für die Folge einfach durch σ bezeichnet werden, derselbe entspricht offenbar dem mit x benannten Werthe bei der Kettenreibung.

Fig. 41, Taf. V.

In derselben Art, wie hier als Folge der Seilsteifigkeit eine Vergrößerung des Lastarmes bei dem auflaufenden Seilstücke nachgewiesen worden, zeigt sich die Wirkung als eine Verkleinerung des Kraftarmes für das ablaufende Seilstück CE . Auch hier wird der Querschnitt bei C des Seilstückes CE zunächst durch eine der Richtung von P entgegengesetzte Spannung Z_1 und ausserdem in der inneren Hälfte $N_1 N_2 K$ von einer in γ nach oben wirkenden Spannung s_1 und in der äusseren Hälfte von einer Druckkraft p_1 in dem Punkte δ angegriffen. Es geht dies daraus hervor, dass bei dem Abwickeln des Seiles bei C die Fasern der inneren Querschnittshälfte $N_1 N_2 K$ gezogen, diejenigen der äusseren Hälfte $N_1 N_2 L$ zusammengedrückt werden. Dass dann die Mittelkraft S_1 von Z_1 , s_1 und p_1 , welche gleich P sein muss, in einem zwischen C und A gelegenen Punkte c angreifen muss, also eine Verkleinerung des Kraftarmes um die Grösse $Cc = \sigma$ eintritt, ist in derselben Weise zu erkennen, wie für das auflaufende Seil gezeigt worden ist.

Denkt man sich nun die beiden Seilenden BD und CE unterhalb frei schwebend, indem die Kräfte Q und P etwa durch angehängte Gewichte dargestellt sind, so werden, wie bei den Ketten gelegentlich des Flaschenzugs angeführt worden, diese Gewichte in Folge der Seilsteifigkeit sich nach derselben Seite hin um σ verschieben, und zwar nach der einen oder anderen Seite, je nachdem die Bewegung in der einen oder anderen Richtung erfolgt. Jedenfalls hat man für eine solche Seilrolle, unter ϱ den Halbmesser des Reibungskreises für den Zapfen verstanden, die Beziehung

$$Q(r + \varrho + \sigma) = P(r + \varrho + \sigma),$$

welcher Ausdruck mit demjenigen für die Kettenrolle vollständig übereinstimmt, wenn man darin x für σ setzt.

Fig. 42, Taf. V.

Die Untersuchung aller mit Seilen arbeitenden Getriebe geschieht daher in derselben Art, wie für Ketten gezeigt worden, und es handelt sich etwa nur noch um die graphische Bestimmung der Grösse σ . In welcher Weise diese Grösse σ behufs Feststellung der Krafrichtungen zur Verwendung zu bringen ist, wird in keinem Falle zweifelhaft sein, wenn man sich nur vergegenwärtigt, dass unter allen Umständen das auflaufende Seil seinen Arm um σ vergrössert, das ablaufende ihn um ebenso viel verringert. Würde z. B. bei der durch Fig. 42, Taf. V, skizzirten Vorrichtung ein Heben der an der Trommel CH hängenden Last Q durch eine Umdrehung der Rolle A hervorgebracht, so hätte man als Richtungen für die Seilkräfte offenbar die Linien de , fg und hh anzusehen.

Die Ermittlung von σ läuft im Wesentlichen darauf hinaus, diese Grösse durch Zeichnung aus einem der empirischen Ausdrücke zu finden, welche man für den Seilsteifigkeitswiderstand aufgestellt hat. Von diesen verschiedenen Ausdrücken *) pflegt man in der Praxis den von Eytelwein aufgestellten meistens anzuwenden, da derselbe bei seiner einfachen Form eine hinreichende Genauigkeit, wenigstens für Hanfseile und grössere Kräfte, ergibt. Es sei auch hier dieser Ausdruck zu Grunde gelegt, wobei indessen bemerkt werden kann, dass man, wenn in besonderen Fällen, etwa bei Drahtseilen eine andere Formel angewendet werden sollte, mit Rücksicht auf diese die Grösse σ in ähnlicher Art bestimmen müsste, wie es hier für die Eytelwein'sche Formel gezeigt werden soll.

*) S. Weisbach, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik, Thl. I.

Nach dieser Formel ist der gesammte Steifigkeitswiderstand S , welcher beim Aufwickeln und Abwickeln zusammen eintritt, gegeben durch

$$S = 0,0186 \frac{d^2}{r} Q,$$

worin d die Seildicke, r den Rollenhalbmesser in Millimetern, Q die Spannung des belasteten Seiles bedeutet. Unter S ist diejenige Kraft zu verstehen, welche an dem Seile für die Kraft angebracht werden müsste, um lediglich die Seilsteifigkeit an beiden Seilenden zu überwinden, so dass also, wenn von der Zapfenreibung abgesehen wird, für die einzuleitende Bewegung an dem Kraftseile die Kraft

$$P = Q + S = Q \left(1 + 0,0186 \frac{d^2}{r} \right)$$

angreifen muss.

Nun fand sich im Vorstehenden, wenn ebenfalls die Zapfenreibung ausser Acht gelassen wird, zwischen Q und P die Beziehung

$$Q (r + \sigma) = P (r - \sigma), \text{ daher } P = \frac{r + \sigma}{r - \sigma} Q,$$

wofür bei der verhältnissmässigen Kleinheit von σ gegen r genau genug

$$P = \left(1 + 2 \frac{\sigma}{r} \right) Q$$

eingeführt werden kann. Durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke für P erhält man daher

$$1 + 0,0186 \frac{d^2}{r} = 1 + 2 \frac{\sigma}{r}, \text{ oder } \sigma = 0,0186 \frac{d^2}{2}.$$

Um diesen Ausdruck bequem zur Construction zu machen, schreibe man ihn

$$\sigma = 0,0372 \frac{d}{2} \frac{d}{2} = \frac{1}{26,8} \frac{d}{2} \frac{d}{2}.$$

Dieser Werth findet sich leicht durch Zeichnung wie folgt: Man zieht in dem kreisförmigen Querschnitte des Seiles, Fig. 43, Taf. V, durch den Mittelpunkt A zwei gegen einander geneigte, etwa zu einander senkrechte Geraden AC und AF , macht AC gleich 26,8 oder rund 27 Millimeter, verbindet C mit B und zieht durch D die Gerade DE parallel CB . In AE erhält man alsdann die Grösse von σ , denn es ist nach der Construction

$$AE = AD \frac{AB}{AC} = \frac{d}{2} \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{26,8} = \sigma.$$

Es springt eine gewisse Analogie dieser Construction mit derjenigen von α bei den Ketten ins Auge, denn wäre der Kreis um A der Querschnitt des Ketteneisens, so würde man in der Strecke AE die Grösse α erhalten, wenn man den Winkel ADE gleich dem Reibungswinkel φ für die Kettenglieder machte. Man könnte daher in diesem Sinne diesen Winkel ADE auch hier gewissermaassen den Reibungswinkel nennen, sofern seine Tangente das Verhältniss der Grösse σ zum Halbmesser des Seilquerschnitts bestimmt. Der Unterschied zwischen Seil und

Fig. 43, Taf. V.

Kette liegt nur darin, dass bei der letzteren jener Winkel ADE für alle Kettenstärken constant gleich dem Reibungswinkel des Ketteneisens ist, während dieser Winkel bei dem Seile von der Stärke desselben abhängig ist, insofern seine Tangente im directen Verhältnisse mit der Stärke d wächst. Daher kommt es auch, dass die Widerstände der Seilsteifigkeit bei allen dickeren Seilen so beträchtlich grösser ausfallen als die Reibungswiderstände von Ketten, denn jener gedachte Winkel ADE ist offenbar gleich 45° , also $\sigma = \frac{d}{2}$, wenn $\frac{d}{2} = 26,8 \text{ mm}$ ist, also für eine Seilstärke von *rot* 54 mm oder etwa 2 Zoll.

Es ist noch von einigem Interesse, zu wissen, bei welcher Seil- resp. Kettenstärke die Grössen σ und κ gleiche Werthe annehmen. Man findet diesen Grenzfall, wenn man die Tangente des Winkels ACB gleich dem Kettenreibungscoefficienten 0,2 setzt, also aus

$$\frac{AB}{AC} = \frac{d}{2 \cdot 26,8} = 0,2,$$

d. h. für $d = 10,7 \text{ mm}$. Ein Seil von dieser Stärke würde denselben verhältnissmässigen Steifigkeitswiderstand geben, wie eine Kette von derselben Dicke, unter der Voraussetzung natürlich, dass die Rollen auch in beiden Fällen gleiche Grösse hätten.

Bei Zugrundelegung einer anderen Formel für die Steifigkeit hat man natürlich die Construction zur Bestimmung von σ dieser Formel entsprechend zu modificiren.

§. 8.

Die Zahnreibung.

Fig. 44, Taf. V.

Bei der Uebertragung der drehenden Bewegung zwischen zwei Axen durch Zahnräder stellt sich ausser den Zapfenreibungen in den Lagern der Axen noch ein Reibungswiderstand an den Stellen ein, wo die Zähne mit einander in Berührung kommen. Dieser Widerstand ist, wie jede Reibung, eine Folge der relativen Verschiebung der beiden mit einander in Berührung kommenden Flächen, und er tritt nicht auf, wenn eine solche relative Verschiebung nicht vorhanden ist. Daher wird ein Reibungswiderstand zwischen zwei zusammenwirkenden Zähnen auch in demjenigen Augenblicke nicht vorhanden sein, wo die Berührung der Zähne in der Centralinie der Räder, d. h. in dem Berührungspunkte O der beiden Theilkreise A und B , Fig. 44, Taf. V, stattfindet, denn in diesem Augenblicke, aber auch nur in diesem, haben die Zähne beider Räder in dem Berührungspunkte zwei an Richtung und Grösse vollkommen übereinstimmende Bewegungen. Das Letztere ist aber nicht der Fall, sobald der Berührungspunkt zweier Zähne ausserhalb der Centrale $O_1 O_2$ gelegen ist, wie ein Blick auf die Figur zeigt. Treten z. B. zwei Zähne der Räder A und B , von denen dasjenige A als das treibende im Sinne des Pfeiles angenommen werden möge, mit den Punkten a_1 und b_1 in Berührung, so hat der Punkt a_1 eine Bewegung in der Richtung $\alpha_1 a_1$, der Punkt b_1 des Zahnes von B dagegen eine Bewegungsrichtung $\beta_1 b_1$, wenn $\alpha_1 a_1$ und $b_1 \beta_1$ die zu den betreffenden Radien an a_1 und b_1 senkrechten Linien be-

deuten. Aus diesen Richtungen folgt sogleich, dass bei der Bewegung die Zahnflächen sich auf einander in gewissem Betrage verschieben müssen. Die Richtung dieser Verschiebung, welche übrigens schon durch die Richtungen von $\alpha_1 a_1$ und $\beta_1 b_1$ angegeben wird, erkennt man auch daraus, dass nach einer gewissen Drehung beider Räder, wenn die Berührung der Zähne mit den Punkten a_0 und b_0 der Theilkreise in der Centrale in O geschieht, die beiden Bogen der Zahnflächen $a_1 a_0$ und $b_1 b_0$ sich auf einander so bewegen, dass zunächst a_1 mit b_1 und nachher a_0 mit b_0 zusammengetroffen ist. Man kann sich diese Bewegung der Zahnflächen auf einander daher so vorstellen, als ob zunächst der kleinere Bogen $a_1 a_0$ sich auf dem grösseren $b_0 b_1$ durch reine Wälzung ohne Schiebung bewegt habe, und hierauf durch eine Verschiebung des Bogens $a_1 a_0$ auf der Fläche $b_1 b_0$ im Betrage $\widehat{b_1 b_0} - \widehat{a_1 a_0}$ die Punkte a_0 und b_0 zum Zusammentreffen gebracht seien. Die Verschiebung der Zahnflächen hat daher eine solche Richtung, vermöge welcher jeder Zahn des einen Rades auf der Zahnfläche des anderen sich nach dessen Axe hin zu verschieben strebt.

Dieser Zustand kann aber nur so lange vorherrschen, als die Berührung der Zähne vor der Centrale $O_1 O_2$ geschieht, während die Verschiebungsrichtung die entgegengesetzte wird, sobald der Berührungspunkt der Zähne die Centrallinie $O_1 O_2$ passirt hat. Denn wenn die beiden Zähne z. B. mit den Punkten a_2 und b_2 hinterhalb der Centrallinie in Berührung treten, so erkennt man aus den Richtungen $a_2 \alpha_2$ und $b_2 \beta_2$ der Bewegungen dieser Punkte, dass nunmehr eine Verschiebung der Zähne auf einander in solcher Richtung erfolgt, vermöge deren jeder Zahn des einen Rades sich auf der Zahnfläche des anderen von dessen Axe fort zu verschieben strebt. Dies stimmt auch damit überein, dass von den beiden Bogen $a_0 a_2$ und $b_0 b_2$ der Zahnprofile zuerst a_0 mit b_0 und nachher a_2 mit b_2 zur Deckung gekommen ist, und dass die entsprechende Bewegung der Bogen auf einander daher aus einem Wälzen im Betrage des kleineren Bogens $b_0 b_2$ und gleichzeitigem Verschieben um die Grösse $\widehat{a_0 a_2} - b_0 b_2$ in der angegebenen Richtung bestehend angesehen werden kann. Bei richtig construirten Zähnen muss nun bekanntlich die Normale zu den Zahnflächen in deren Berührungspunkte immer durch den Berührungspunkt der Theilkreise gehen, verbindet man daher den Berührungspunkt $a_1 b_1$ oder $a_2 b_2$ mit O , so erhält man in diesen Verbindungslinien die betreffenden Normalen, in welchen die Zähne auf einander wirken würden, wenn gleitende Reibung nicht vorhanden wäre. Wegen des Vorhandenseins der letzteren wird man dagegen die Druckrichtung zwischen den Zähnen von der Normale um den Reibungswinkel φ abweichend annehmen müssen. Mit Rücksicht auf die im Vorstehenden ermittelten Richtungen der Verschiebungen der Zähne auf einander ergiebt sich daher, dass die Druckrichtung derselben bei ihrer Berührung vor der Centrale in $a_1 b_1$ durch die Linie $a_1 b_1 C$ und bei der Berührung hinter der Centrale in $a_2 b_2$ durch die Gerade $Ca_2 b_2$ gegeben ist.

Bei den Zahnradconstructionen ist die Wahl der Dimensionen nun so getroffen, dass der Eingriffsbogen, d. h. der Bogen, innerhalb dessen Zähne überhaupt zum Eingriffe gelangen, immer die Theilung t der Räder übertrifft, da eine geringere Grösse als t hierfür eine ununterbrochene Uebertragung der Bewegung unmöglich machen würde. Die Grösse des Eingriffsbogens schwankt in den gewöhnlichen Fällen der Transmissionen etwa zwischen $1,2 t$ und $1,7 t$, und dürfte nur selten den Werth $2 t$ übersteigen. Für den Fall, dass der Eingriffsbogen gerade gleich der zweifachen Theilung ist, wird die Bewegung fortwährend gleichzeitig von zwei Paaren von Zähnen übertragen, wie es in der Figur durch $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ dargestellt ist. Bei einem

Eingriffsbogen gleich der einfachen Theilung t dagegen geschieht die Bewegungsübertragung fortwährend durch ein einziges Zähnpaar, und wenn der Eingriffsbogen zwischen t und $2t$ gelegen ist, wird die Uebertragung abwechselnd durch ein einziges und durch zwei Zähnpaare geschehen. Es möge zunächst angenommen werden, dass zwei Zähnpaare in a_1b_1 und a_2b_2 gleichzeitig die Bewegung vermitteln und dabei die Voraussetzung gemacht werden, dass sie beide mit gleichem Drucke an der Kraftübertragung sich betheiligen. Ferner mögen Evolvenzenzähne vorausgesetzt werden, für welche also die beiden Normalen in a_1b_1 und a_2b_2 in eine und dieselbe durch O gehende Gerade GH fallen, welche man bekanntlich unter einem Winkel $\alpha = \angle GOO_1$ von etwa 75° gegen die Centrale O_1O_2 anzunehmen pflegt. Gesetzt nun, der Drehung des Rades B stehe ein bestimmter Widerstand Q entgegen, welcher in O nach der Richtung OG wirke, so würde ohne Zahnreibung das Rad A auf B in a_1b_1 und a_2b_2 zusammen mit einer Kraft P_0 nach der Richtung GH wirken müssen, welche Kraft P_0 gerade gleich Q wäre. Wegen der Zahnreibung wirkt indess das Rad A auf B mit zwei Kräften, von denen die eine in die Richtung a_1C , die andere in die Richtung Ca_2 fällt. Die Mittelkraft dieser beiden Drucke geht somit durch den Durchschnittspunkt C dieser Richtungen und muss unter der gemachten Voraussetzung gleicher Drucke in a_1b_1 und a_2b_2 den Winkel 2φ dieser Richtungen halbiren. Denkt man daher diese Drucke R der Zähne als CD und CE aufgetragen, so ist in der Diagonale CF des Parallelogramms die zur Bewegung erforderliche Betriebskraft P gegeben. Diese Mittelkraft CF ist unter der Voraussetzung gleicher Drucke an beiden Zahnpaaren parallel zu der gemeinschaftlichen Normale GH und hat von dieser letzteren einen Abstand, welcher sich zu $\xi = \frac{1}{2} a_1 a_2 \cdot \tan \varphi$ aus der Figur ergibt. Erlaubt man sich die sehr nahe zutreffende Annahme $a_1 a_2 = t \sin \alpha$, unter α den Winkel $\angle GOO_1$ der Normale GH gegen die Centrale verstanden, so findet man, wenn man $\tan \varphi = \mu$ setzt, den besagten Abstand $\xi = \frac{\mu t}{2} \sin \alpha$.

Die Grösse von ξ ist dabei nicht abhängig von der Lage der beiden Eingriffspunkte a_1b_1 und a_2b_2 im Vergleich zu O , vorausgesetzt nur, dass sie zu beiden Seiten von O liegen, weil nur dann die beiden Druckrichtungen den Winkel 2φ mit einander einschliessen. Dieser Betrachtung gemäss lässt sich die Zahnreibung folgendermaassen auffassen. Während bei einem als ganz reibungslos vorausgesetzten Zahneingriffe die Uebertragung der Kraft von einem Rade auf das andere in der Richtung der auf den Zahnflächen normal stehenden Geraden erfolgen würde, daher in diesem Falle die Bewegungskraft P_0 dem in dieser selbigen Richtung wirkenden Widerstande Q genau gleich sein müsste, so hat die Zahnreibung eine parallele Versetzung der Betriebskraft um den Abstand ξ zur Folge, derart, dass der Hebelarm der Betriebskraft in Bezug auf die Axe des getriebenen Rades B um diese Grösse ξ verkleinert und der Hebelarm in Bezug auf die Axe des treibenden Rades A um diese Grösse vergrößert wird. Es findet also hier in gewissem Sinne ein ähnliches Verhalten statt, wie bei der Kettenreibung und Seilsteifigkeit, denn wenn man sich nur vergegenwärtigt, dass die betreffende Kraft CF oder P für das Rad B als treibende und die entgegengesetzte Reaction FC für das Rad A als widerstehende Kraft auftritt, so kann man auch sagen, dass durch die Zahnreibung der Kraftarm um die Grösse ξ verringert, der Lastarm dagegen um diesen Betrag vergrößert wird. Um also die Zahnreibung graphisch zum Ausdrucke zu bringen, hat man nur nöthig, die Grösse ξ zu bestimmen und eine entsprechende Verlegung der theoretischen Krafrichtung parallel mit sich selbst um diesen Werth ξ vorzunehmen.

Es ist übrigens leicht, zu zeigen, dass das Resultat dieser gedachten Verlegung mit

demjenigen übereinstimmt, welches man in der bisherigen Praxis durch Rechnung zu finden gewohnt ist, wobei man fast allgemein die Formel für die Zahnreibung

$$Z = Q \mu \pi \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$$

zu Grunde legt. Hier bedeutet Z die im Berührungspunkte der Theilkreise O anzubringende Kraft, welche der Zahnreibung entspricht und n_1 und n_2 stellen die Zähnezahlen der Räder A und B und wieder α der Winkel GOO_1 , welchen die normale Druckrichtung mit der Centrale bildet. Ein in O nach der Richtung OG wirkender Widerstand Q des Rades B hat dann den Hebelarm $r_2 \sin \alpha$, und es ist zu dessen Ueberwindung in C eine in der Richtung CF wirkende Kraft erforderlich, welche nach dem Verhältnisse der Hebelarme $r_2 \sin \alpha$ und $r_2 \sin \alpha - \xi$ sich bestimmt zu

$$X = Q \frac{r_2 \sin \alpha}{r_2 \sin \alpha - \xi}.$$

Diese Kraft X muss von dem treibenden Rade A in dem Punkte C in der Richtung CF ausgeübt werden, also an einem Hebelarme $r_1 \sin \alpha + \xi$, und müsste daher an dem Rade A im Punkte O nach der Richtung OH ein Druck angebracht werden, welcher ebenfalls nach dem Verhältnisse der Hebelarme zu

$$Y = X \frac{r_1 \sin \alpha + \xi}{r_1 \sin \alpha} = Q \frac{r_2 \sin \alpha}{r_2 \sin \alpha - \xi} \frac{r_1 \sin \alpha + \xi}{r_1 \sin \alpha}$$

sich berechnet. Setzt man hierin

$$r_1 = \frac{t n_1}{2\pi}; r_2 = \frac{t n_2}{2\pi} \text{ und } \xi = \frac{\mu t}{2} \sin \alpha,$$

so findet man nach einfacher Reduction

$$Y = Q \frac{n_2}{n_2 - \mu \pi} \frac{n_1 + \mu \pi}{n_1} = Q \left(1 + \frac{\mu \pi}{n_1} + \frac{\mu \pi}{n_2} \right).$$

Da nun aber ohne Zahnreibung $P_0 = Q$ ist, so folgt die Grösse der Zahnreibung, als Kraft, welche im Punkte O nach der Richtung von Q angebracht werden muss, zu

$$Z = Y - P_0 = Q \mu \pi \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right).$$

Es mag hier bemerkt werden, dass diese letztere Formel, welche man fast allgemein zur Berechnung der Zahnreibung anwendet, unter derselben Voraussetzung ermittelt ist¹⁾, welche hier zu Grunde gelegt ist, dass nämlich der Druck immer zu gleichen Theilen von zwei Zähnpaaren übertragen werde. Bei der Ermittlung der Zahnreibung auf dem Wege durch Rechnung pflegt man ferner, um den Werth $\sin \alpha$ zu vermeiden, in der Regel für Q den Widerstand einzuführen, welcher in dem Berührungspunkte O der Theilkreise normal zu der Centrale sich einstellt. Wenn auch diese Annäherung immer zugelassen werden darf, da $\sin \alpha$ immer nur wenig von der Einheit verschieden ist ($\sin 75^\circ = 0,9659$), so erkennt man doch, dass die graphische Methode einer solchen Näherungsannahme nicht bedarf, da die Zeichnung an Einfachheit durchaus nicht einbüsst, wenn man den Widerstand Q in der wirklich von ihm eingehaltenen Richtung zeichnet.

¹⁾ Weisbach-Herrmann, Ingenieur- und Masch.-Mechanik. Th. III, 1.

Es ergibt sich hieraus auch, dass die Construction dieselbe bleibt, auch wenn irgend welche andere als evolventische Zahnformen zu Grunde gelegt werden. Kennt man nur die Gestalt der Eingriffslinien, also bei cylindrischen Zahnformen die erzeugenden Rollkreise, so hat man für jede Lage des Berührungspunktes der Zähne in der nach dem Berührungspunkte O der Theilkreise gezogenen Sehne des Rollkreises die Richtung der Normale und daher, unter dem Winkel φ dagegen geneigt, die Reactionsrichtung der Zähne gegen einander. Natürlich ist die Richtung der gedachten Normale bei cycloidischen und überhaupt anderen als evolventischen Zahnformen eine wechselnde und man wird in solchem Falle für die Ermittlung von ξ passend eine solche Stellung der Zähne voraussetzen, bei welcher der Winkel α der Normale gegen die Centrale einen mittleren Werth hat. Die Abweichungen von ξ in den verschiedenen Stellungen der Zähne werden aber immer nur geringe sein, und können bei der Unsicherheit, die ohnehin in allen Reibungscoefficienten steckt, füglich vernachlässigt werden.

Die bisherige Untersuchung ist auf die Voraussetzung gegründet, dass die Kraftübertragung gleichzeitig durch zwei Zahnpaare vermittelt werde. Wenn dagegen nur ein einziges Paar von Zähnen in Berührung ist, wie dies z. B. fortwährend der Fall sein würde, wenn der Eingriffsbogen nur über eine Theilung t sich erstreckte, so wird der Reibungswiderstand etwas geringer. Denkt man sich zu dem Ende etwa, dass die Zähne in Fig. 44, Taf. V durch die Kreise $a_2 a_3$ und $b_1 b_3$ begrenzt würden, so wäre stets nur ein Zahnpaar im Eingriffe, indem der letztere zwischen $a_1 b_1$ in demselben Augenblicke beginnt, in welchem er in $a_2 b_2$ aufhört. In diesem letztgedachten Augenblicke wirkt der Zahn des Rades A in dem Punkte a_1 mit einer Kraft R nach der Richtung $a_1 C$ auf das Rad B . Während der Bewegung wird diese Kraft R fortwährend dieser Richtung $a_1 C$ parallel bleiben, so lange, bis der Berührungspunkt der Zähne in die Centrale nach O getreten ist, in welchem Augenblicke eine Zahnreibung nicht stattfindet. Bei der Berührung der Zähne in $a_1 b_1$ ist dagegen eine Reibung vorhanden, welche sich wie im Vorhergehenden dadurch kennzeichnen lässt, dass der Hebelarm der Kraft um eine gewisse Grösse ξ verkleinert, derjenige der Last um denselben Werth vergrößert wird. Hier ist unter ξ der normale Abstand des Punktes O von der Reactionsrichtung $a_1 C$ zu verstehen, also ist $\xi = a_1 O \cdot \tan \varphi = \mu e_1$, wenn man die Länge $a_1 O$ der Eingriffslinie mit e_1 bezeichnet. Da dieser Werth ξ , wie erwähnt, stetig kleiner und zu Null wird, wenn die Berührung in O stattfindet, so erkennt man, dass in dem vorausgesetzten Bewegungszustande die Zahnreibung beim Beginne der Bewegung, d. h. bei der Berührung in $a_1 b_1$ einen grössten Werth hat, welcher bis zu Null abnimmt, wenn die Zähne in der Centrale O sich berühren. Wollte man daher für die Reibung einen mittleren Werth einführen, so hätte man, einer Berührung der Zähne in der Mitte zwischen O und a_1 entsprechend, für ξ_1 den Werth $\frac{1}{2} e_1 \mu$ einzuführen. In gleicher Weise findet man für die weitere Bewegung der Zähne, wenn der Berührungspunkt von O nach a_2 fortschreitet, dass die Reibung im Anfange Null ist und in a_2 ihren grössten Werth hat, für welchen sich $\xi = O a_2 \tan \varphi = \mu e_2$ bestimmt, wenn die Länge $O a_2$ mit e_2 bezeichnet wird. Auch hierfür hätte man einen mittleren Werth $\xi_2 = \frac{1}{2} \mu e_2$ einzuführen. Ein Unterschied zwischen der Bewegung vor und hinter der Centrale ist nur insofern vorhanden, als die Richtung des Zahndruckes hinter der Centrale durch die Gerade $C a_2$ gegeben ist. Macht man jetzt noch die Voraussetzung, dass $a_1 O = O a_2$ gemacht sei, also $e_1 = e_2 = \frac{1}{2} t \sin \alpha$, so kann man als durchschnittlichen Werth von ξ den Ausdruck $\xi = \frac{1}{2} \mu e_1 = \frac{1}{4} \mu t \sin \alpha$ einführen. Diese Grösse von ξ ist also nur halb so gross, wie die unter der früheren Voraussetzung für den gleichzeitigen Eingriff zweier Zahnpaare gefundene $\xi = \frac{1}{2} \mu t \sin \alpha$, und es entspricht dies dem

Umstände, dass in diesem letzteren Falle der Eingriffsbogen auch doppelt so gross ist, nämlich $2t$, als wenn immer nur ein Zahnpaar im Eingriffe steht. Bezeichnet man daher den vollständigen Eingriffsbogen vor und hinter der Centrale mit ω , so kann man in beiden Fällen allgemein $\xi = \frac{1}{4} \mu \omega \sin \alpha$ setzen. Dieser Ausdruck kann auch als gültig angenommen werden, wenn der Eingriffsbogen einen Werth zwischen t und $2t$ hat, wie dies in den meisten Fällen der Praxis der Fall ist, denn dann findet, wie schon oben bemerkt, abwechselnd eine Kraftübertragung durch ein und durch zwei Paare von Zähnen statt.

Hiernach findet man nun den Werth von ξ in jedem Falle einfach durch folgende Construction. Man trage auf einer Geraden, Fig. 45, Taf. V, die Strecke $OA = \frac{1}{4} \omega$ ab, unter ω die Länge des Eingriffsbogens der Räder verstanden, ziehe gegen die Normale OO_1 zu OA die gerade Linie OB unter dem Winkel α , wobei α etwa gleich 75° bei Evolventenzähnen und etwa 80° bei Cycloidenzähnen genommen werden kann, ferner ziehe man AB senkrecht zu OB und trage OB gleich dem Reibungswinkel φ an, so erhält man in dem Lothe OD auf BD die Grösse ξ . Hierbei kann man μ passend gleich 0,1 bis 0,12 wählen. Nimmt man $OA = \frac{1}{4} \omega = \frac{1}{2} t$ an, so erhält man für die Reibung denselben Betrag, welchen man bei numerischer Berechnung unter Zugrundelegung der bekannten Formel $\mu \pi Q \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$ meistens in Rechnung stellt.

Fig. 45, Taf. V.

Hat man ξ ermittelt, so ist die Zahnreibung leicht zu bestimmen. Wirkt z. B. an der Windetrommel AB , Fig. 46, Taf. V, an einem Seile bei B die Last Q , und soll die Kraft P bestimmt werden, welche an dem Kurbelarme DE in der Richtung EF erforderlich ist, um mit Hilfe des Triebrades DC und des auf der Trommelwelle befestigten Zahnrades AC ein Heben der Last zu bewirken, so verfährt man in folgender Weise. Die Richtungslinie der Last Q findet man in der Geraden o_1b , welche um die Grösse σ (s. Seilsteifigkeit) von dem mittleren Trommelumfange bei B absteht, während der Zahndruck Z durch die Gerade o_1c gegeben ist, welche die Centrale AD unter einem Winkel von 75 bis 80° schneidet, und von dem Berührungspunkte C der Theilkreise den Abstand ξ hat. Zieht man nun noch von den Durchschnittspunkten o_1 zwischen Q und Z und o_2 zwischen Z und P die betreffenden Tangenten o_1a und o_2d an die Reibungskreise der Axenlager, so lässt sich das Kräftepolygon construiren. Zu dem Ende macht man o_1I gleich Q und zieht $I II$ parallel mit o_1c , um in $I II$ den Druck Z zwischen den Zähnen zu finden, nach welchem deren Stärke zu bemessen ist. Zerlegt man diesen Druck nach den Richtungen $I III$ parallel mit o_2F und $III III$ parallel mit o_2d , so findet man in $I III$ die gesuchte Kraft P an der Kurbel. Um P_0 zu finden, hätte man nach Angabe der abgerissen gezeichneten Linien den Räderdruck durch den Berührungspunkt C der Theilkreise senkrecht zu der Centrallinie AD anzunehmen. Die Zeichnung ergibt für $\mu = 0,1$ und für $Q = 100$, $P = 30,4$ $P_0 = 28,1$, daher ist der Wirkungsgrad $\eta = \frac{P_0}{P} = 0,924$.

Fig. 46, Taf. V.

Es ist leicht zu erkennen, dass, wenn in Fig. 44 der Betrieb von dem Rade B ausgeht, derart, dass die Berührungspunkte a_1b_1 und a_2b_2 ihre Lage beibehalten, d. h. wenn die Bewegung in der den Pfeilen entgegengesetzten Richtung erfolgt, die Druckrichtung der Zähne immer noch parallel zu GH verbleibt, die Druckkraft Z aber nach der entgegengesetzten Seite von dieser Linie, nämlich zwischen GH und die Axe von A um den Betrag ξ sich versetzt, etwa nach dem Punkte C_1 . Dieser Fall stellt sich z. B. bei der Rückgangsbewegung der in Fig. 46 besprochenen

Windetrommel unter Einfluss der Last Q ein. Wenn dagegen die Bewegung des Rades B in Fig. 44 durch das Rad A in der den Pfeilen entgegengesetzten Richtung hervorgerufen wird, so bleibt die Untersuchung dieselbe mit dem einzigen Unterschiede, dass jetzt die Druckrichtung durch die Gerade $H'G'$ dargestellt ist.

§. 9.

Der Riementrieb.

Bei der Uebertragung der rotirenden Bewegung zwischen zwei Axen durch einen Riemen bestehen die hauptsächlichsten Nebenhindernisse in der Reibung, welche die durch den Riemenzug in ihre Lager gepressten Axen daselbst erleiden, indem die Steifigkeitswiderstände der Riemen beim Auf- und Ablauen der Rollen so unbedeutend sind, dass man auf diese nicht zu rücksichtigen braucht. Dagegen fällt die Zapfenreibung bei einer gewissen zu übertragenden Kraft beträchtlich grösser aus, als bei der Uebertragung durch Zahnräder, insofern bei dem Riementrieb nur die Differenz der beiden Riemenspannungen als übertragene Kraft figurirt, während die Zapfenreibung durch die Summe dieser Spannungen veranlasst wird. Die Untersuchung dieses Widerstandes sowie die Ermittlung der in den Riemen auftretenden Spannungen macht sich hier sehr einfach.

Fig. 47, Taf. V.

Es sei beispielsweise eine Welle A , Fig. 47, Taf. V, von einer anderen Welle B aus mittelst der Riemscheiben CD und EF zu betreiben, und es solle die Kraft P gefunden werden, welche an der treibenden Welle B an dem Hebelsarme BK wirken muss, um einen am Hebelsarme AL der Welle A auftretenden Widerstand Q zu überwinden. Ist der die beiden Riemscheiben umspannende Riemen mit einer gewissen Kraft gespannt, so sind im Zustande der Ruhe die Spannungen in den beiden Riemenstücken DE und CF von gleicher Grösse S . Wenn dann die Scheibe EF durch eine Kraft in der Richtung des Pfeiles zu drehen gestrebt wird, so wächst dadurch die Spannung des Riemenstückes CF zu einem Betrage S_1 , während gleichzeitig die Spannung des anderen Riemenstückes DE abnimmt zu einem Werthe S_2 , so lange, bis der Ueberschuss $S_1 - S_2$ genügt, um den Widerstand Q der Axe A zu überwinden. Es ist dabei indess vorausgesetzt, dass ein Rutschen des Riemens auf den Scheiben nicht vorher eintreten könne. Nun ist aber die Bedingung für ein solches Rutschen nach der Lehre von der Reibung bekanntlich dadurch gegeben, dass die Spannung S_1 in dem ziehenden Riemenrade CF im Zustande des Gleitens

$$S_1 = S_2 e^{\mu \alpha}$$

beträgt, wenn S_2 die Spannung im gezogenen Riemenstücke ED , μ den Reibungscoefficienten zwischen Riemen und Scheibe, α den umspannten Bogen (Bogenlänge vom Halbmesser gleich Eins) und e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems 2,71828 . . bedeutet. Der Widerstand W , welcher in einem Abstände von der Axe A gleich dem Halbmesser AC der Riemscheibe bei einer Spannung S_2 des gezogenen Riemenendes ED höchstens überwunden werden kann, ist daher durch $W = S_1 - S_2 = S_2(e^{\mu \alpha} - 1)$ ausgedrückt. Diesem Verhalten entsprechend

muss folglich die Riemenspannung S genügend gross gemacht werden, und pflegt man anzunehmen, dass die Riemenspannung im Zustande der Ruhe, für welchen sie in beiden Riemenstücken von gleicher Grösse ist, durch $S = \frac{1}{2} (S_1 + S_2)$ ausgedrückt ist. Die beiden Riemenspannungen S_1 und S_2 denke man sich in jedem einzelnen Falle zu einer Mittelkraft Z vereinigt, so ist die Zeichnung des Kräftepolygons ohne Weiteres in derselben Weise ermöglicht, wie in den bisher angeführten Fällen, wenn man den Riemen durch diese Mittelkraft der beiden Riemenspannungen ersetzt. Die Richtung dieser Mittelkraft ist leicht anzugeben, wenn man das Verhältniss der beiden Riemenspannungen im Grenzzustande des Gleitens $\frac{S_1}{S_2} = e^{\mu\alpha}$ bestimmt hat.

Denkt man sich nämlich von dem Schnittpunkte O der Riemen auf deren Richtungen zwei Strecken OG und OH von beliebiger Grösse, doch in dem Verhältnisse $\frac{OH}{OG} = \frac{S_1}{S_2} = e^{\mu\alpha}$ aufgetragen, so erhält man in der Diagonale OJ des aus diesen Strecken gezeichneten Parallelogramms die Richtung der Mittelkraft Z , durch welche man die beiden Riemenspannungen vollständig ersetzt denken kann. Um diese Mittelkraft selbst und damit die einzelnen Riemenspannungen S_1 und S_2 zu finden, ziehe man nunmehr wieder von den Durchschnitten o_1 und o_2 dieser Mittelkraft Z mit Q und P die entsprechenden Tangenten o_1a und o_2b an die Reibungskreise der Axen A und B . Macht man dann Io_1 gleich Q und zieht III parallel zu o_1a , so findet man in o_1II die Mittelkraft Z der beiden Riemenspannungen S_1 und S_2 , welche letzteren man in $o_1IV = S_1$ und $IVII = S_2$ erhält, sobald man o_1II nach den Richtungen von CF und DE zerlegt. Aus $o_1II = Z$ ergibt sich dann weiter in bekannter Art die Kraft P , welche in K wirksam sein muss, wenn man o_1III parallel zu o_2K und $IIIII$ parallel zu o_2b zieht. Um die theoretische Betriebskraft P_0 zu finden, welche erforderlich wäre, wenn keine Reibungen auftreten würden, hätte man unter Benutzung der Richtung OJ der Mittelkraft Z die beiden Lagerreactionen o_1A und o_2B durch die Zapfenmitten gerichtet anzunehmen, oder aber man könnte, wie in der Figur geschehen, die Schnittpunkte O_1 und O_2 der Kräfte Q und P mit dem ziehenden Riemen CF benutzen, indem man den letzteren für diesen Fall als eine die beiden Scheibenpunkte C und F ohne Reibung verbindende Zugstange oder ein Seil auffasst.

Um das Verhältniss der beiden Riemenspannungen $\frac{S_1}{S_2} = e^{\mu\alpha}$ graphisch zu ermitteln, sind in Fig. 48, Taf. VI die logarithmischen Spiralen für die am häufigsten vorkommenden Reibungscoefficienten

$$\mu = 0,12; 0,18; 0,28; 0,38; 0,47$$

gezeichnet. Nimmt man hierin den Halbmesser OA des Kreises als Einheit an, so giebt der einem Umspannungswinkel $AOC = \alpha$ entsprechende Radius vector AB der zu dem betreffenden Reibungscoefficienten μ gehörigen Spirale die Grösse $e^{\mu\alpha}$. Denkt man daher die Spannung S_2 des gezogenen Riemens durch OA dargestellt, so findet man in OB die Spannung S_1 des ziehenden Riemenendes und in $CB = S_1 - S_2$ die durch den Riemen zu übertragende Kraft.

Nach dem Bisherigen ist es nun leicht, eine Vergleichung des Riemenbetriebes mit dem Rädertriebe hinsichtlich des Wirkungsgrades anzustellen. Zu dem Ende möge die Bewegung eines Mahlganges untersucht werden, da die gewöhnlichen Mahlgänge ebenso häufig durch Riemen wie durch Zahnräder betrieben werden. Es möge dabei A , Fig. 49, Taf. VI, das Mühleisen und BD die auf demselben angebrachte Riemscheibe vorstellen, welche von dem Betriebsriemen auf dem Bogen BMD umspannt sein soll. Mit Hülfe der Spirale für $\mu = 0,28$ in Fig. 48

Fig. 49, Taf. VI.

findet man, wie angegeben, das Verhältniss $S_2 : S_1$, wenn man den Umspannungswinkel $BA D = \alpha$ in Fig. 48 an den Anfangsradius OA anträgt, dann sind die Strecken OA und OB den Riemenspannungen S_2 und S_1 proportional. Trägt man daher diese Strecken in Fig. 49 beziehungsweise gleich KL und OK an, so erhält man in OL die Richtung der aus beiden Riemenspannungen resultirenden Mittelkraft Z , welche als die auf das Mühleisen A treibend wirkende Kraft P anzusehen ist. Da der Widerstand des Mühlsteins auf die Mahlfäche desselben gleichmässig vertheilt ist, so muss man diesen Widerstand durch ein Kräftepaar darstellen, dessen Kräfte Q , Q etwa in den Richtungen HJ und FG angenommen werden mögen. Ein seitlicher Axendruck des Mühleisens gegen seine Steinbüchse wird durch dieses Kräftepaar nicht erzeugt, die Reaction des Lagers wird vielmehr lediglich durch die Mittelkraft Z der Riemenspannungen in einer dieser letzteren gleichen Grösse und entgegengesetzten Richtung hervorgerufen, so dass man die Lagerreaction R in der mit LO parallelen Tangente ao_2 an den Reibungskreis von A anzunehmen hat. Für das Gleichgewicht der vier Kräfte Q , Q , R und Z oder P hat man daher die Mittelkraft zweier von ihnen gleich und entgegengesetzt derjenigen der beiden anderen anzunehmen. Verbindet man folglich die Schnittpunkte o_1 und o_2 , macht $o_1 I$ gleich Q und zieht durch I die Parallele III zu $o_1 o_2$, so erhält man in $II o_1$ die Triebkraft P oder die Mittelkraft der beiden Riemenspannungen S_1 und S_2 , welche letzteren selbst durch Zerlegung von $II o_1$ nach den Riemenrichtungen in $III o_1 = S_1$ und in $II III = S_2$ erhalten werden. Ohne Reibung hätte man die Reaction des Zapfenlagers in der Richtung AO_2 , d. h. durch die Mitte von A parallel zu OL anzunehmen und mit $o_1 O_2$ parallel durch I zu ziehen, wodurch man $P_0 = II_0 o_1$ erhalten würde. Aus der Figur folgt für eine Riemenreibung $\mu = 0,28$ und eine Zapfenreibung $0,1$ für $Q = 100$; $P = 401,6$, $P_0 = 379,2$ daher $\eta = \frac{P_0}{P} = 0,944$.

Fig. 50, Taf. VI.

Nimmt man andererseits an, der Mahlgang solle durch Eingriff des auf der Königs-
 welle B , Fig. 50, Taf. VI, befindlichen Zahnrades BC in das Steingetriebe AC umgedreht
 werden, so hat man die Druckrichtung der Zähne in $o_1 c$ unter einem Winkel von etwa 75°
 gegen die Centrale im Abstände ξ von C und die Reaction der Steinbüchse parallel dazu in $o_2 a$
 anzunehmen. Macht man daher gleichfalls Io_1 gleich Q und zieht III parallel zu $o_1 o_2$, so
 findet man P in $o_1 II$. Um P_0 zu bestimmen, hätte man den Räderdruck in C und die Reac-
 tion R in A normal zur Centrale AB anzunehmen und würde, wenn $I_0 O_1$ gleich Q gemacht
 wird, in $O_1 II_0$ die theoretische Betriebskraft P_0 erhalten, welche senkrecht zur Centrale AB
 in C wirken müsste. Um den Wirkungsgrad zu bestimmen, müsste man anstatt der in $o_1 c$ wir-
 kenden Kraft P diejenige Kraft P' ermitteln, welche mit P_0 in derselben Richtung $O_1 C$ wirkt.
 Bezeichnet ω den Durchschnitt dieser beiden Richtungen, so hat man also $P = o_1 II$ nach den
 Richtungen $O_1 C$ und ωB zu zerlegen. Zieht man daher $o_1 III$ parallel mit $O_1 C$ und $II III$
 parallel zu ωB , so erhält man in $o_1 III$ die Kraft P' , welche in C senkrecht zur Centrale AB
 wirken muss, daher der Wirkungsgrad zu $\eta = \frac{P_0}{P'}$ sich ergibt. Aus der Zeichnung folgt für

$Q = 100$; $P' = o_1 III = 226,4$, $P_0 = 217,8$, daher $\eta = \frac{P_0}{P'} = 0,962$. Aus diesen beiden Bei-

spielen ergibt sich daher, dass der Riemenbetrieb weniger ökonomisch ist, als der Zahntrieb,
 wie sich dies auch von vornherein erwarten liess. Es ist auch klar, dass das Resultat für den
 Riemenübertrag noch ungünstiger ausfallen wird, wenn der Reibungscoefficient des Riemens auf
 der Scheibe kleiner als $0,28$ angenommen werden muss, oder wenn der Riemen die Scheibe des

Mühleisens auf einem kleineren Bogen α umspannt, da alsdann die Riemen Spannungen und mit ihnen auch die Zapfenreibung grösser ausfallen. Bei der hier vorgenommenen Vergleichung ist die Zapfenreibung in beiden Fällen vernachlässigt worden, welche an der Axe der treibenden Königswelle in Folge des Riemen- oder Räderdruckes auftritt, weil in den gewöhnlichen Fällen mehrere Mahlgänge von einer central zu ihnen aufgestellten Betriebswelle aus bewegt werden, in Folge welcher Anordnung die gedachten Drucke sich gegenseitig aufheben. Ist letzteres indessen nicht der Fall, oder ist nur ein Mahlgang zu betreiben, so wird in Folge des grösseren Riemenzuges auch in den Lagern der Betriebswelle ein grösserer Reibungswiderstand hervorgerufen werden, als dies bei dem Räderbetriebe der Fall ist.

In ähnlicher Art wie bei dem Riemen sind auch die Spannungsverhältnisse bei dem Bremsbände zu beurtheilen. Auch hier hat man zwei verschiedene Spannungen S_1 und S_2 in den beiden Enden des Bandes, welche zu einander in der Beziehung stehen $S_1 = S_2 e^{\mu\alpha}$, und zwar ist die grössere Spannung S_1 diejenige, welche der gleitenden Bewegung der Bremsscheibe in dem Bande entgegenwirkt. Man kann daher auch bei dem Bremsbände die Resultirende Z der beiden Spannungen S_1 und S_2 statt der letzteren einführen und diese Resultirende als eine die angestrebte Bewegung hindernde Kraft auffassen. Es sei *A*, Fig. 51, Taf. VI, die Axe einer Winde, auf welcher die Bremsscheibe *BC* befindlich ist, deren Bremsband einerseits an dem festen Bolzen *E* angeschlossen sein mag, während das andere Ende an dem Bolzen *D* des um *E* drehbaren Bremshebels *EDG* eingelenkt ist. Dem umspannten Bogen $CMB = \alpha$ entsprechend kann man in der bekannten Weise aus der dem Reibungscoefficienten für Bremsbänder $\mu = 0,18$ zugehörigen Spirale der Fig. 48 das Verhältniss von S_1 und S_2 entnehmen und die beiden dafür gefundenen Strecken auf den Richtungen der Enden des Bremsbandes von deren Durchschnitte *O* als *OH* und *OJ* auftragen. In der Diagonale *OK* des daraus gezeichneten Parallelogramms ist dann die Resultirende Z der Lage und Richtung nach gegeben. Was die Zugrichtungen des Bremsbandes anbelangt, so ist leicht ersichtlich, dass das an den festen Zapfen *E* angeschlossene Ende *CE* eine Zugrichtung hat, welche durch den Mittelpunkt dieses Zapfens *E* hindurchgeht, da eine relative Bewegung des Bandes gegen diesen Festpunkt nicht stattfindet. Dagegen wird die Zugrichtung des anderen an dem beweglichen Zapfen *D* angelenkten Bandendes tangential an den Reibungskreis von *D* gerichtet sein.

Wenn nun eine Kraft Q die Welle *A* an einem Hebelarme *AF* im Sinne des Pfeiles zu drehen strebt, so wird, unter o_1 den Durchschnitt dieser Kraft Q mit der Mittelkraft Z der beiden Bremsbandspannungen verstanden, durch die Tangente o_1a an den Reibungskreis von *A* die Richtung des Zapfendruckes in *A* gegeben sein. Macht man daher o_1I gleich der Kraft Q , und zieht durch *I* eine Parallele mit *OK*, so ist in *II* die zur Bremsung erforderliche Resultirende Z der beiden Bremsbandspannungen S_1 und S_2 gefunden. Diese Spannungen erhält man wieder in $III II = S_1$ und in $I III = S_2$, wenn man *II* nach den Richtungen von *HO* und *JO* zerlegt. Um ferner den Druck P in dem Punkte *G* des Bremshebels zu finden, welcher zur Erzeugung der Spannung $S_2 = I III$ in dem Bande *BD* genügt, legt man von dem Durchschnitte o_2 dieser beiden Kräfte P und S_2 die entsprechende Tangente o_2e an den Reibungskreis des festen Drehzapfens, um in dieser Tangente die Richtung der zugehörigen Lagerreaction zu finden. Eine Zerlegung der Spannung $I III = S_2$ nach *IV* parallel mit o_2e und nach *IV III* parallel mit o_2G liefert in der Strecke *IV III* die erforderliche Kraft P an dem Hebel bei *G*.

Fig. 51, Taf. VI.

Fig. 52, Taf. VI.

Besonderes Interesse bietet die Ermittlung der Betriebs- und Bremskraft bei einer Fördermaschine dar, bei welcher, Fig. 52, Taf. VI, von der Fördertrommel G zwei Seile FD und EC derartig abgeführt sind, dass bei der Drehung der Trommel in einer bestimmten Richtung, etwa in der des Pfeiles, das eine Seil EC sich aufwickelt und das andere FD sich abwickelt. Hierbei wird die an dem Seile ECB hängende Belastung, bestehend aus dem Gewichte Q der Nutzlast und dem Eigengewichte G der Förderschale, Fördergefässe etc., gehoben, während das Gewicht G der leeren an dem anderen Seile FDB hängenden Förderschale sinkt und hierdurch die Drehung der Fördertrommel begünstigt wird. Wenn bei dieser Bewegung keine Nebenhindernisse vorhanden wären, so könnte man einfach annehmen, dass die Wirkung der ganzen Fördervorrichtung lediglich auf die Hebung der Nutzlast Q hinaus käme, insofern die beiden Förderschalen, als sich gegenseitig ausbalancierend, ausser Betracht kommen würden. Wegen der schädlichen Widerstände ist jedoch eine solche Annahme nicht zulässig, vielmehr hat man die Maschine als eine Vereinigung von zwei Hebevorrichtungen anzusehen, von denen die eine, an dem Seile ECB mit der Last $Q + G$ beschwert, im Zustande des Vorwärtsganges sich befindet, während die andere unter Einwirkung der an dem Seile FDB hängenden Belastung G eine rückläufige Bewegung annimmt. Demgemäss wird die Untersuchung in folgender Art geschehen müssen. Die Zugkraft des aufzuwindenden Seiles BCE ist mit Rücksicht auf die Seilsteifigkeit in den Richtungen $b_1 o_1$ und ce anzunehmen, derart, dass die Hebelarme an den Auflaufstellen B und E um die Grösse σ grösser, an der Ablaufstelle C um ebensoviel kleiner sind, als der Halbmesser der Rolle resp. Trommel. Dagegen ist für das andere in der Abwicklung begriffene Seil FDB die Zugkraft nach den Richtungen fd und $o_2 b_2$ anzunehmen, ebenfalls mit einer Vergrösserung des Hebelarms um σ an der Auflaufstelle D und einer Verkleinerung an den Ablaufstellen F und B . Wegen der linksläufigen Bewegung der Rolle ACB ist daher die Reaction des Lagers dieser Rolle nach der Richtung $a_1 o_1$ anzunehmen, während der Zapfendruck für die andere rechtsläufige Rolle ADB in der Richtung $o_2 a_2$ ausgeübt wird. Macht man daher $o_1 I$ gleich $Q + G$ und $o_2 III$ gleich dem Gewichte G der Förderschale, und zieht durch I eine Parallele III zu ce und durch III eine Parallele $III IV$ zu df , so erhält man in $II I = S_1$ die Spannung des Seils EC und in $IV III$ die Spannung S_2 des Seils FD . Die Resultirende dieser Spannungen Z erhält man daher der Grösse und Richtung nach in VI , wenn man $II V$ parallel und gleich $III IV$ macht. Diese resultirende Seilwirkung geht durch den Durchschnittspunkt o_3 von ce und fd , man hat daher durch o_3 die Parallele $o_3 o_4$ zu $I V$ zu ziehen.

Soll nun die Bewegung der Fördertrommel durch ein in das Zahnrad GJ eingreifendes Getriebe HJ erzeugt werden, so ziehe man wegen der Zahnreibung im Abstände ξ von J und unter dem Winkel von etwa 75° gegen die Centrale GH die Druckrichtung ii der Zähne, und lege von dem Durchschnittspunkte o_4 dieser Richtung mit derjenigen der resultirenden Seilkraft Z die Tangente $o_4 g$ an den Reibungskreis von G , in welcher Tangente der Zapfendruck von G ausgeübt wird. Zerlegt man daher noch die Kraft $I V$ nach den Richtungen $I VI$ parallel zu $o_4 g$ und $VI V$ parallel zu $o_4 i$, so erhält man in $VI V$ die an den Zähnen des Getriebes HJ in der Richtung ii erforderliche Betriebskraft P .

Um die theoretische Betriebskraft P_0 zu finden, hat man nach der anfänglich gemachten Bemerkung nur die eine Nutzlast Q auf der Mittellinie des Seils EC von dem Durchschnittspunkte O derselben mit der gemeinschaftlichen Theilkreistangente JO anzutragen, so dass $O I_0 = Q$ ist. Zieht man dann noch durch O den Radius OG und mit diesem parallel

durch I_0 die Gerade $I_0 II_0$, so erhält man in der Strecke $II_0 O$ die theoretische Betriebskraft P_0 . Zur Bestimmung des Wirkungsgrades hat man wieder P_0 mit derjenigen Kraftkomponente P zu vergleichen, welche sich aus $P = VI V$ ergibt, wenn man dieselbe nach den Richtungen von P_0 und ωH zerlegt. Diese Kraft P' ist in $VI VII$ gegeben, wenn man $VI VII$ parallel OJ und $V VII$ parallel ωH zieht. Aus der Figur ist zu entnehmen für $Q = 36$ und $G = 24$, $P' = VI VII = 47,3$, $P_0 = 40,1$, daher der Wirkungsgrad dieser Fördervorrichtung zu $\eta = \frac{P_0}{P'} = 0,848$ sich bestimmt.

Um die für den Rückgang erforderliche Bremskraft zu ermitteln, möge vorausgesetzt werden, dass die belastete Förderschale nunmehr an dem Seile FDB hänge, so dass der durch dieselbe angestrebte Rückgang dieselbe Bewegungsrichtung hat, wie der im Obigen untersuchte Vorwärtsgang, welche Annahme nur der Bequemlichkeit wegen gemacht wird, um in der Zeichnung sogleich die für den Vorwärtsgang schon ermittelten Krafrichtungen benutzen zu können. Trägt man jetzt nach Angabe der in der Figur durch Striche und Punkte gezeichneten Linien $o_2(III)$ gleich $Q + P$ und $o_1(I)$ gleich G an, und zieht $(III) (IV)$ parallel zu fd und $(I) (II)$ parallel zu ce , so erhält man jetzt in $(IV) (III) = (S_2)$ und in $(II) (I)$ gleich (S_1) die auf die Trommel nach fd und ec wirkenden Seilspannungen, deren Resultirende (Z) man in $(VI) o_3$ erhält, sofern man $o_3(V)$ gleich $(III) (IV)$ und $(V) (VI)$ parallel und gleich $(I) (II)$ macht. Soll nun die Bremsung durch den Bremshebel $NLKM$ geschehen, welcher in K seinen festen Drehpunkt hat, und an dessen Bolzen N und L die Bandenden angeschlossen sind, so zeichne man zunächst die Zugrichtungen $W_1 n$ und $W_2 l$ tangential an die Bremsscheibe $W_1 W_2$ und an die Reibungskreise der Bolzen N und L . Von dem Durchschnittspunkte o_5 dieser Richtungen trägt man auf den letzteren die Strecken $o_5 U$ und $o_5 T$ proportional den beiden Spannungen s_2 und s_1 des Bremsbandes auf, wozu man sich der Figur 48 in bekannter Weise bedienen kann. Die Diagonale des dadurch entstehenden Parallelogramms Vo_5 giebt dann die Richtung der resultirenden Wirkung z des Bremsbandes gegen die Trommel. Zieht man nun von dem Durchschnitte o_6 dieser Kraft mit der Resultirenden (Z) der Seile die Tangente $o_6(g)$ an den Reibungskreis der Welle G , so kann nunmehr die Kraft $(Z) = (VI) o_3$ des Kräftepolygons nach $(VI) (VII)$ parallel $o_5 o_6$ und $(VII) o_3$ parallel $o_6(g)$ zerlegt werden, und man findet in $(VII) (VI)$ die resultirende Kraft z , welche die beiden Spannungen des Bremsbandes ersetzen kann. Um schliesslich die in M auf den Bremshebel wirkende Kraft p zu bestimmen, zieht man vom Durchschnittspunkte o_7 dieser Kraft mit $o_6 o_5$ die Tangente $o_7 k$ an den Reibungskreis des Drehzapfens K und zerlegt endlich die Kraft $(VII) (VI)$ oder z nach den Richtungen $(VII) (VIII)$ parallel $o_7 k$ und $(VIII) (VI)$ parallel mit Mo_7 . In der letzteren Strecke $(VIII) (VI)$ ist dann die an dem Bremshebel bei M anzubringende Kraft p gefunden.

Bisher wurde immer stillschweigend vorausgesetzt, dass die zur Bewegung des Getriebes dienende Kraft P gerade in demjenigen Betrage vorhanden sei, in welchem sie zur Ueberwindung des Widerstandes Q erfordert wird. Diese Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn ein Wasserrad mit gleichmässiger Beaufschlagung, also constantem Kraftmomente, einen Mahlgang bewegt, dessen Arbeitswiderstand ebenfalls constante Grösse hat. Ebenso kann man diese Bedingung bei den gewöhnlichen Hebevorrichtungen und Winden als erfüllt ansehen. In sehr vielen Fällen der Praxis aber ist entweder das Kraftmoment oder das Lastmoment oder auch jedes derselben während der Bewegung periodisch veränderlich, derart natürlich, dass unter Voraussetzung des Beharrungszustandes die in einer solchen Periode von der Betriebskraft P verrichtete

mechanische Arbeit immer genau gleich derjenigen ist, welche von dem Nutzwiderstande sammt den Nebenhindernissen in derselben Zeit aufgezehrt worden ist. Ein solcher Zustand findet z. B. immer statt, wenn die betreffende Maschine ein Kurbelgetriebe enthält. Setzt man z. B. eine gewöhnliche Dampfmaschine voraus, so hat der von dem Dampfkolben aus durch die Lenkerstange auf den Kurbelzapfen übertragene Druck P ein sehr veränderliches Moment, welches z. B. in den Todtlagen der Kurbel zu Null herabsinkt, während es irgendwo zwischen den Todtlagen einen Maximalwerth hat. Dagegen kann der Widerstand Q , welcher etwa an dem Umfange eines auf der Kurbelwelle befestigten Rades wirkt, von constanter Grösse sein. Es ist hieraus klar, dass das Moment dieses Widerstandes Q einen gewissen mittleren Werth zwischen dem kleinsten und grössten Momente der Kraft haben muss, wenn der obigen Bedingung des Beharrungszustandes genügt werden soll. In Folge dessen wird durch die periodische Veränderlichkeit des Kraftmomentes abwechselnd eine Beschleunigung und Verzögerung der mit der Maschine verbundenen beweglichen Massen veranlasst, und zwar derart, dass während der Zeit, wo das Kraftmoment dasjenige des Widerstandes übertrifft, die überschüssende Arbeit des ersteren in Form von lebendiger Kraft in den Massen aufgespeichert wird, von wo aus sie dann jederzeit zur Verwendung bereit ist, wenn das Kraftmoment unter das Moment des zu überwindenden Widerstandes herabsinkt. Ein ganz ähnlicher Zustand findet auch statt, wenn der Widerstand wegen seiner Wirkung auf ein Kurbelgetriebe mit veränderlichem Momente auftritt, dagegen das Moment der Kraft constant ist, wie dies z. B. bei dem Betriebe der Kurbeln von Pumpwerken durch Wasserräder der Fall ist.

In welcher Weise die Untersuchung eines derartigen Getriebes zu geschehen hat, möge an dem durch Fig. 53, Taf. VI vorgestellten Beispiele eines Sägegatters gezeigt werden. Hierbei wird die Welle A , welche durch die Kurbel AC und die Lenkerstange CD eine auf- und niedergehende Bewegung des Sägenrahmens EF bewirkt, durch die Riemscheibe $B_1 B_2$ von einer Transmissionswelle aus gedreht, und trägt die Welle zur Ausgleichung der Bewegung das Schwungrad U , welches durch seine Masse hauptsächlich die oben erwähnte Wirkung ausüben soll. Der verticale Widerstand, welchen die Zähne Z der Säge im Holzstamme K beim Niedergange finden, sei mit Q bezeichnet und gleich Io_1 aufgetragen. Die Lenkerstange wirkt auf das Gatter in der Richtung dc der betreffenden gemeinschaftlichen Tangente an die Reibungskreise der beiden Zapfen D und C , und ausserdem wirken auf die Gleitlager G_1 und H_1 des Gatters die Führungen G und H mit den Reactionen R_1 und R_2 unter dem Reibungswinkel gegen die Normale. Verbindet man daher wie bekannt die Schnittpunkte o_1 von Q und R_1 und o_2 von R_2 und der Stangenkraft T , so findet man die einzelnen Kräfte aus dem Polygon, wenn man $I III$ parallel R_1 und $o_1 III$ parallel dc zieht. Man hat dann $II I$ gleich R_1 ; $III II$ gleich R_2 und in $o_1 III$ die erforderliche Stangenkraft T . Gesetzt nun, der Riemen, welcher die Scheibe $B_1 B_2$ zur Hälfte umspannen möge, dessen beide Enden also parallel gerichtet sind, habe in dem gezogenen Ende eine Spannung $S_2 = B_2 L_2$ und in dem ziehenden Theile die Spannung $S_1 = B_1 L_1$, welche Kraft S_1 aus S_2 mit Hülfe der Figur 48 bestimmt werden kann. Den resultirenden Riemenzug Z findet man hier zu $BL = S_1 + S_2 = B_1 L_1 + B_2 L_2$, und bestimmt sich die Lage dieser Kraft nach der bekannten Eigenschaft der Mittelkraft paralleler Kräfte leicht dadurch, dass man $B_2 l_2 = B_1 L_1$ und $B_1 l_1 = B_2 L_2$ macht und $l_1 l_2$ zieht. Durch den Durchschnittspunkt l dieser Verbindenden mit $B_2 B_1$ muss dann die Mittelkraft Z gehen. Denkt man nun im Kräftepolygon die Grösse der Riemenkraft $Z = BL$ parallel ihrer Richtung als $o_1 IV$ angetragen, so findet man in der Verbindungslinie $IV III$ die Mittelkraft aus

der Riemenkraft Z und der Stangenkraft T , welche beide auf die Kurbelwelle A einwirken. Zum Gleichgewichte dieser Welle ist daher noch eine von dem Lager auf A ausgeübte Reaction R erforderlich, welche durch $III\ IV$ der Grösse und Richtung nach gegeben ist. Die Lage dieser von dem Wellenlager auf die Axe A ausgeübten Reaction R findet man daher in der mit $III\ IV$ parallel gezogenen Tangente aa des Reibungskreises von A . Diese Linie aa schneidet sich mit der Stangenkraft T in O , also einem anderen Punkte als dem Schnittpunkte B von T und Z , und man schliesst daraus, dass die drei Kräfte T , Z und R für sich nicht im Gleichgewichte sein können, da zu diesem Zwecke die Kraft Z nicht in BL , sondern in OJ wirksam sein müsste. Das Moment der Riemenkraft Z ist also hier kleiner als das Moment der Widerstände, und es muss daher in dem betrachteten Augenblicke von dem Schwungrade lebendige Kraft hergegeben werden, um die Bewegung zu ermöglichen. Die Wirkung des Schwungrades hat man sich nun wegen der gleichmässig um die Axe A vertheilten Massenelemente nicht durch eine einzelne Kraft, sondern durch ein Kräftepaar dargestellt zu denken, dessen Kräfte M , M an irgend zwei diametral gegenüberliegenden Punkten m_1 und m_2 desjenigen Kreises angreifend gedacht werden können, dessen Halbmesser $Am_1 = Am_2$ gleich dem Trägheitshalbmesser ϱ des Schwungrades sein mag. Die Grösse der Kräfte M dieses Kräftepaares ist dann dadurch bestimmt, dass die Resultirende aus diesem Kräftepaare und der Riemenkraft Z oder BL eine durch O parallel zu BL gerichtete Kraft von derselben Grösse $Z = OJ = BL$ sein muss. Um demgemäss M zu bestimmen, hat man wieder die Schnittpunkte o_3 zwischen BL und m_1M und o_4 zwischen OJ und m_2M zu verbinden, und die Kraft $BL = Z$ nach dieser Richtung o_4o_3 und der Richtung von M zu zerlegen. Zieht man daher im Kräftepolygon durch IV eine Parallele zu o_3o_4 und durch o_1 eine Parallele mit M , welche Kraft M hier vertical, also mit Q gleichgerichtet angenommen wurde, so erhält man in o_1V die Grösse jeder der beiden Trägheitskräfte M , welche in m_1 und m_2 , also im Abstände des doppelten Trägheitshalbmessers des Schwungrades, die Drehung der Kurbelwelle A in dem betrachteten Augenblicke unterstützen. Es ist leicht zu erkennen, dass man dieselbe Grösse M erhalten wird, nach welcher Richtung diese Kräfte M auch wirksam angenommen werden, vorausgesetzt nur, dass ihr Abstand immer gleich $m_1m_2 = 2\varrho$ gewählt werde. Nimmt man diesen Abstand von anderer Grösse $2\varrho_1$, so erhält man auch einen anderen Werth M_1 für die Trägheitskräfte, so zwar, dass immer das Moment des Kräftepaares denselben Betrag hat, dass also $2M\varrho = 2M_1\varrho_1$ ist. Aus dem Vorstehenden ergibt sich, dass die Wirkung der Massen durch ein Kräftepaar sich ausdrücken lässt, vorausgesetzt, dass die Massen nicht einseitig angeordnet sind, und dass der Einfluss dieses Kräftepaares sich nur durch eine parallele Versetzung der betreffenden Betriebskraft P oder Z darstellen lässt, dass aber eine Vergrösserung des Axendruckes und somit der Zapfenreibung damit nicht verbunden ist. Es ist auch deutlich, dass das betreffende Kräftepaar in entgegengesetztem Drehungssinne, nämlich der Betriebskraft entgegenwirkt, wenn das Moment der letzteren grösser ausfällt, als dasjenige der Widerstände. Dies würde z. B. der Fall sein, wenn im vorliegenden Beispiele der Arm M der Riemenkraft grösser als AN wäre. In diesem Falle wird die Wirkung des gefundenen Kräftepaares auf eine Beschleunigung der Massen hinauskommen, während der oben untersuchte Zustand, wo das Schwungrad im Sinne der Bewegung fördernd einzutreten hat, mit einer Verzögerung der Massen verbunden ist. Es ist bekannt, dass solche Beschleunigungen und Verzögerungen bei jeder ungleichförmigen Bewegung während des Beharrungszustandes mit periodischer Regelmässigkeit abwechseln. Wie gross die momentane Verzögerung und Beschleunigung in jedem Falle ist,

lässt sich nach Ermittlung der Grösse des Kräftepaars aus den bekannten Massen immer bestimmen, auf welche Bestimmung aber hier, als dem Zwecke dieser Arbeit ferner liegend, nicht eingegangen werden soll.

Nachdem in dem Vorhergehenden diejenigen Verhältnisse näher besprochen sind, welche bei der Bestimmung des Wirkungsgrades der Maschinengetriebe hauptsächlich von Einfluss sind, sollen zum Schlusse zur weiteren Erläuterung noch zwei Beispiele behandelt werden, welche häufiger vorkommenden Maschinen entsprechen. Zu diesen Beispielen sind ein Uferkrahn auf Taf. VII und eine Balancierdampfmaschine auf Taf. VIII gewählt worden.

§. 10.

B e i s p i e l e .

Fig. 54—58, Taf. VII.

Bei dem in Fig. 54 bis 58, Taf. VII, dargestellten Drehkrahne trägt der um die feste Säule L drehbare Ausleger in seinem freien Ende die Leitrolle B , über welche die Lastkette geführt wird, deren eines Ende an dem Bolzen C befestigt ist, und in deren herabhängender Schleife in gewöhnlicher Art die Last Q mittelst der losen Rolle A hängt. Von B_2 aus geht die Kette über die unterstützenden Rollen D_1 und D hinweg nach der Kettentrommel EE_1 , welcher mit Hülfe der beiden Vorgelege F und J die Bewegung durch die Kurbel HK ertheilt wird. Zeichnet man zunächst, wie bisher immer geschehen, die Krafrichtungen, so wirkt die Last Q in der Tangente aa an den Reibungskreis des Zapfens A der losen Rolle, während die Spannung S_1 in dem bei C befestigten Kettenende in der Richtung $a_1\alpha_1$ und die Spannung S_2 der anzuziehenden Kette A_2B_1 in der Verticalen $a_2\alpha_2$ wirkt, so dass der Hebelarm bei A_1 um $\varkappa$ grösser, bei A_2 um $\varkappa$ kleiner ist, als der mittlere Rollenhalbmesser AA_1 . Stellt daher III die Last Q vor, und ist $I\alpha_1$ parallel zu $II\alpha_2$ gemacht, so giebt die Verbindungslinie $\alpha_1\alpha_2$ durch ihren Schnittpunkt III mit Q die beiden Kettenspannungen $IIIII = S_1$ in A_1C und $III I = S_2$ in A_2B_1 . Zeichnet man ferner in bekannter Weise die Zugrichtungen b_1o_1 und b_2o_1 für die Kettenstücke an der Schnabelrolle B , so erhält man deren Zapfenreaction in der Tangente o_1b an den Reibungskreis von B . Eine Zerlegung der Kettenspannung $I III = S_2$ nach diesen Richtungen o_1b und b_2o_1 liefert daher in $IV III$ die Spannung S_3 in dem Kettenstücke BD . Die Richtung der Kettenstücke über der Rolle D zeigt die im grösseren Maassstabe entworfene Figur 56, aus welcher ohne Weiteres deutlich sein dürfte, dass die Zapfenreaction dieser Leitrolle ¹⁾ die Richtung do_2 hat. Zieht man daher durch III im Kräftepolygon die Parallele $III V$ zu do_2 und $IV V$ parallel zu e_1o_2 , so erhält man in $IV V$ die Kettenspannung S_4 in der zwischen der Führungsrolle D und der Trommel E_1 befindlichen Kette, deren Zugrichtung e_1d_1 , Fig. 54, so anzunehmen ist, dass durch die Kettenreibung an der Trommel bei E_1 eine Vergrösserung, an der Leitrolle D eine Verkleinerung des theoretischen Hebelarmes um $\varkappa$ statt-

¹⁾ Von dem geringen Widerstande der Tragrolle D_1 ist hier abgesehen worden, wollte man ihn in Rechnung bringen, so hätte es wie in Fig. 36, Taf. IV, zu geschehen.

findet. Zieht man nun im Abstände ξ (Zahnreibung) von dem Berührungspunkte F der Theilkreise unter etwa 75° gegen die Centrale EG die Druckrichtung der ersten Zahnräder in o_3f , und legt an den Reibungskreis von E die Tangente $\varepsilon_1 e$, welche mit $d_1 e_1$ und $f o_3$ durch denselben Punkt geht, so kann man weiter die Seilspannung S_4 oder $IV V$ nach den gefundenen Richtungen zerlegen in $IV VI$ und $VI V$. Hiervon bedeutet die letztere Strecke $VI V$ den Lagerdruck der Trommelwelle und die Strecke $IV VI$ den zwischen den Zähnen der Räder bei F in der Richtung $f o_3$ wirkenden Druck Z_1 . Es mag bemerkt werden, dass die Richtung der Lagerreaction $e \varepsilon_1$ wegen der weiten Entfernung des Schnittpunktes der Richtungen $d_1 e_1$ und $f o_3$ mittelst einer Hilfsconstruction gefunden werden kann, indem man durch E eine Gerade $\beta \varepsilon \gamma$ legt und dazu eine Parallele $\beta_1 \gamma_1$ zieht. Theilt man letztere in ε_1 in solchem Verhältnisse, dass $\beta \varepsilon : \varepsilon \gamma = \beta_1 \varepsilon_1 : \varepsilon_1 \gamma_1$, so findet man in ε_1 einen Punkt der gesuchten Reaction. Unter ε ist hier der Schnittpunkt der Hilfslinie $\beta \gamma$ mit dem Reibungskreise verstanden, daher diese Construction eine vollkommen genügende Annäherung gewährt, sobald man die Hilfslinie $\beta \gamma$ nahezu senkrecht zu der vorausichtlichen Reactionsrichtung, d. h. zu der Tangente an den Reibungskreis von E annimmt.

In gleicher Weise zieht man nun die Drucklinie $o_3 i$ für die Zähne der Räder HJ und GJ und die Tangente von o_3 an den Reibungskreis von G , daher eine Zerlegung des Zahndruckes $VI IV = Z_1$ nach den Richtungen $o_3 i$ und $o_3 g$ in $VI VII = Z_2$ den Druck liefert, mit welchem das Getriebe HJ in der Richtung $o_3 i$ auf das Rad GJ wirken muss. Zieht man endlich noch von dem Durchschnittspunkte o_4 zwischen P und Z_2 die entsprechende Tangente $o_4 h$ an den Reibungskreis von H , und legt durch VII eine Parallele zu P und durch VI eine solche zu $o_4 h$, so erhält man in $VIII VII$ die Kraft P , welche an der Kurbel K in der Richtung $K o_4$ anzubringen ist. Da diese Grösse in der Figur sehr klein ausfällt, so ist der Theil $VI VII VIII$ des Kräftepolygons zu grösserer Genauigkeit in $VI VII' VIII'$ in fünffacher Vergrösserung aufgetragen, indem $VI' VII'$ gleich $5 \cdot VI VII$ gemacht wurde. Demgemäss ist P gleich $\frac{1}{5} VIII' VII'$ zu setzen.

Um die theoretische Kraft P_0 zu ermitteln, kann man einfach die Last $\frac{Q}{2}$ an der Trommel bei E_1 wirksam denken und hat demzufolge die Strecke $V IV_0$ gleich $\frac{1}{2} I II$ zu machen. Nun zeichnet man in ähnlicher Art, wie oben das Kräftepolygon $V IV_0 VI_0 VII_0 VIII_0$, indem man dabei die Zahndrucke durch die Berührungspunkte F und J senkrecht zu den Centralen EG und GH annimmt, und die Lagerreactionen durch die Zapfenmitten E , G und H gerichtet zeichnet. In solcher Art ist das durch abgerissene Linien dargestellte Kräftepolygon entworfen, welches die theoretische Betriebskraft P_0 in der Strecke $VIII_0 VII_0$ oder $\frac{1}{5} VIII'_0 VII'_0$ liefert. Die Zeichnung ergiebt für $Q = 100$, $P = 1,155$, $P_0 = 0,833$, daher der Wirkungsgrad des vorliegenden Krahns zu $\eta = \frac{P_0}{P} = 0,722$ angenommen werden kann. Um auch die Brems-

kraft p zu bestimmen, welche an dem Hebel WU bei W angebracht werden muss, hat man die rückgängige Bewegung des Krahns ins Auge zu fassen. Zunächst ist hierfür deutlich, dass durch die an der losen Rolle hängende Last $Q = I II$ bei deren Niedersinken die Spannung S_1 des bei C befestigten Kettenstückes nunmehr durch $III I$, und dagegen die Spannung des Kettenstückes zwischen A_2 und B_1 durch $S_2 = III II$ ausgedrückt ist, mit anderen Worten, die Spannungen der von der losen Rolle abgehenden Ketten vertauschen ihre Werthe bei erfolgtem Rückgange der Maschine. Ferner ist leicht ersichtlich, dass die Zugrichtungen der Ketten an der festen Rolle B , der Führungsrolle D und der Trommel durch diejenigen Linien dar-

gestellt werden, welche durch Striche und Punkte in der Figur gezeichnet sind. Daher hat man bei B die Kettenkräfte nach $(o_1)(b_1)$ und $(o_1)(b_2)$, bei D nach $(o_2)(b_2)$ und $(o_2)(e_1)$ und an der Trommel nach $(e_1)(d_1)$ anzunehmen, während die Zapfendrucke bei B und D die Richtungen $(o_1)(b)$ und $(o_2)(d)$ haben. Die Richtung des Druckes (Z_1) , mit welchem nunmehr die Zähne des Rades EF auf das Getriebe GF wirken, ist jetzt durch die Gerade $(f)(f)$ gegeben, welche die Centrale EG unter 75° schneidet, von dem Berührungspunkte der Theilkreise F jetzt aber einen Abstand ξ nach der Seite der getriebenen Axe G hin hat, wie schon früher bei Gelegenheit der Zahnreibung angegeben worden. Dieser Druckrichtung $(f)(f)$ entsprechend wird die Richtung des Lagerdruckes von E nur ganz unwesentlich von ε_1 abweichen, so dass die letztere für den Vorwärtsgang gefundene Richtung auch für den Rückgang beibehalten werden kann. Mit Rücksicht hierauf kann das Kräftepolygon daher in folgender Art gezeichnet werden. Man macht zunächst $(I)(III) = III II = (S_2)$, zieht $(I)(IV)$ parallel zu $(o_1)(b)$ und $(III)(IV)$ parallel $(o_1)(b_2)$, ferner $(IV)(V)$ parallel $(o_2)(e_1)$ und $(III)(V)$ parallel $(o_2)(d)$ und zerlegt dann $(IV)(V)$, d. h. die Spannung (S_4) der von der Trommel ablaufenden Kette, parallel mit den Richtungen $(f)(f)$ und $\varepsilon_1 \varepsilon$ in die Kräfte $(IV)(VI)$ und $(VI)(V)$.

Von den beiden Enden des die Scheibe Br umschliessenden Bremsbandes ist nun das eine an dem festen Drehzapfen U des Bremshebels befestigt, die Zugrichtung desselben daher durch die Mitte von U gerichtet anzunehmen. Das andere Ende dagegen, welches an den beweglichen Bolzen V des Hebels angeschlossen ist, hat eine den Reibungskreis von V tangierende Richtung; der Schnittpunkt beider Bremsbandzüge ist in (o_4) . Macht man nun die Strecken $(o_4)V_2$ und $(o_4)V_1$ mit Hülfe der Figur 48, Taf. VI, proportional den Spannungen s_2 und $s_1 = s_2 e^{u\alpha}$, so erhält man in der Diagonale $(o_4)V_3$ die Richtung für die Wirkung der Bremse. Diese Richtung schneidet sich mit der des Zahndruckes $(f)(f)$ in (o_3) , daher die von (o_3) an den Reibungskreis von G gelegte Tangente $(o_3)(g)$ die Richtung des Lagerdruckes angiebt. Zieht man daher im Kräftepolygon durch (VI) eine Parallele zu $(o_3)(o_4)$, und durch (IV) eine Parallele zu $(o_3)(g)$, so erhält man in $(VI)(VII) = z$ die Wirkung der Bremse, welche man durch $(VI)(VIII)$ und $(VII)(VIII)$ parallel den Bremsbandenden in s_1 und s_2 zerlegen kann. Die kleinere Spannung s_2 ist durch den Bremshebel hervorzubringen, die grössere Spannung s_1 wird durch den festen Zapfen U ausgeübt. Zieht man daher durch den Durchschnittspunkt (o_5) zwischen der Spannung s_2 und der Bremskraft p die entsprechende Tangente $(o_5)u$ an den Reibungskreis von U , so hat man nur noch die Strecke $(VIII)(VII) = s_2$ nach den Richtungen von p und $(o_5)u$ zu zerlegen. Der Deutlichkeit wegen ist in der Zeichnung die Strecke $(VII)(VIII)$ in zehnfacher Vergrößerung gleich $(VII)(X)$ aufgetragen, so dass die erforderliche Bremskraft durch die Strecke $(IX)(VII)$ ebenfalls in zehnfacher Vergrößerung gefunden ist.

Nachdem im Vorhergehenden die Hebevorrichtung des Krahns untersucht worden ist, möge nunmehr auch mit Hülfe der Fig. 57 und 58 die Drehvorrichtung geprüft werden. Das drehbare Krahngestell sammt der angehängten Last Q stützt sich mittelst des oberen Traversenlagers auf den Spurzapfen L im Kopfe der Säule, welcher Zapfen auch seitlich von der Büchse der Traverse L_1 umfasst wird, während der untere cylindrische Ansatz T der Krahnsäule den beiden Frictionsrollen W_1, W_2 im Krahngestelle zum Anlager dient. Die an den unterstützenden Theilen L und T auftretenden Drucke bestimmen sich aus Fig. 57 wie folgt. Ist S der Schwerpunkt des leeren Drehgestells mit allen daran befestigten Theilen als Windewerk, Rollen, Ketten etc., und ist G das in S vertical abwärts wirkende Gewicht dieses drehbaren Theils, so kann man zunächst dieses Gewicht G mit dem Gewichte Q der an A hängenden Last

nach den einfachen Regeln paralleler Kräfte zu einer Mittelkraft $Q + G$ zusammensetzen, welche durch den Punkt M gehen möge. Trägt man auf dieser Richtungslinie $I II$ gleich $Q + G$ ab und legt durch die Mitte des den Rollen W zur Bahn dienenden Cylinders T eine auf der Bahnfläche normale, hier also horizontale Gerade als Richtung für die Reaction R der Säule gegen die Rollen, so erhält man in O einen Schnittpunkt mit $Q + G$, durch welchen auch die Reaction R_1 des Zapfens L hindurchgehen muss. Zieht man daher von O etwa nach der Mitte der Fläche, in welcher die Traverse L_1 gegen den Zapfen L sich seitlich anlegt, die Gerade OL , so hat man zur Bestimmung der Reactionen R und R_1 nur die Strecke $I II$ nach den Richtungen OT und OL zu zerlegen. Man erhält dadurch in $III I$ die Reaction R der Säule gegen die Rollen W und in $II III$ die gesammte Reaction R_1 des Zapfens L . Diese letztere lässt sich in zwei Componenten nach verticaler und horizontaler Richtung zerlegen, von welchen die erstere durch $II I$, die letztere durch $I III$ dargestellt ist. Die verticale Kraft, welche der Gesamtbelastung $Q + G$ gleich ist, erzeugt auf der oberen Stirnfläche des Zapfens L eine Spurzapfenreibung, welche man durch ein Kräftepaar vorstellen kann, dessen einzelne Kräfte jede durch $\frac{1}{2}\mu(Q + G)$ gegeben sind, und dessen Arm gleich $\frac{2}{3}d$ anzunehmen ist, wenn d den Durchmesser des Spurzapfens bedeutet. Die horizontale Componente der Zapfenreaction R_1 ist gleich und entgegengesetzt mit der Reaction R der Säule gegen die Rollen in der Richtung TO , so dass diese beiden Horizontalkräfte ein Kräftepaar bilden, welches mit dem anderen Kräftepaare im Gleichgewichte ist, das durch die verticale Kraft des Zapfens L und die in M wirkende Gesamtbelastung $Q + G$ gebildet wird. Um nun die zum Drehen erforderliche Kraft p zu finden, zeichne man in Fig. 58 zunächst den horizontalen Druck 1 2 gleich $I III$ der Fig. 57 ein, so dass diese Richtung den Reibungskreis des Zapfens L tangirt. Gleichfalls trage man die beiden Spurzapfenreibungen $F = F_1 = \frac{1}{2}\mu(Q + G)$ im Abstände $\frac{1}{3}d$ von der Mitte des Zapfens L zu beiden Seiten nach entgegengesetzten Richtungen ein, um durch dieses Kräftepaar die Spurreibung des Zapfens L in Rechnung zu bringen. Eine Zusammensetzung dieses Kräftepaars F, F_1 mit der horizontalen Zapfenreaction 1 2 wird nun, wie mehrfach gefunden wurde, lediglich eine parallele Verschiebung von 1 2 in unveränderter Grösse nach 4 5 zur Folge haben. Man kann, um die Grösse dieser Verschiebung zu bestimmen, etwa 2 3 gleich F machen, 3 mit 1 verbinden und durch den Schnittpunkt o_1 zwischen 1 2 und F eine Parallele zu 3 1 führen, welche Parallele in ihrem Schnittpunkte o_2 mit F_1 einen Punkt liefert, durch welchen die Resultirende 4 5 aus 1 2 und FF_1 hindurchgeht. Die Richtigkeit dieser Construction ergibt sich sogleich aus den Bedingungen des Gleichgewichts der vier Kräfte 1 2, F , F_1 und 5 4. Nun zeichne man weiter die Druckrichtungen $u_1 w_1$ und $u_2 w_2$ der festen Krahnsäule gegen die Frictionsrollen und zwar derart, dass diese Richtungen die Reibungskreise der Zapfen von W berühren und neben den Berührungspunkten U_1 und U_2 der Rollen mit der Säule um die der wälzenden Reibung entsprechende Grösse ε vorbeigehen. Soll die Drehung durch ein auf der verticalen Welle V befindliches Zahngetriebe erfolgen, welches in den fest mit dem Fundamente verbundenen Zahnkranz Y eingreift, so zeichne man endlich noch die Richtung vv des Zahndruckes, welche in bekannter Art unter etwa 75° gegen die Centrale VL geneigt ist, und von dem Berührungspunkte der Theilkreise beider Räder um den Abstand ξ (nach aussen) entfernt ist. Diese Druckrichtung schneidet sich mit der gefundenen resultirenden Wirkung 4 5 des Zapfens in o_3 , die beiden Reactionen der Säule gegen die Rollen schneiden sich in o_4 , folglich muss die Verbindungslinie $o_3 o_4$ die Mittelkraft eines jeden dieser Paare von Kräften in sich aufnehmen. Zieht man daher 5 6 parallel zu dem Räderdrucke vv und durch 4 eine Parallele mit $o_4 o_3$, so

erhält man schliesslich in 5 6 die Kraft Z , welche von den Zähnen des auf V befindlichen Getriebes in der Richtung vv ausgeübt werden muss. In welcher Weise man weiter die Kraft an einer auf V etwa befindlichen Kurbel ermitteln kann, ist aus den bisher besprochenen Beispielen zur Genüge erkennbar.

Fig. 59, Taf. VIII.

Es möge schliesslich noch das Diagramm für die Balancierdampfmaschine mit Condensation entworfen werden, welche auf Taf. VIII in ihren Elementen skizzirt ist. Es sei hierin durch *III*, Fig. 59, die auf den Kolben wirkende Triebkraft P dargestellt. Diese Kraft wirkt in der geometrischen Axe der Kolbenstange, also in der Geraden KC , indem die Kolbenstange sowohl mit dem Dampfkolben als auch mit der Queraxe C unwandelbar befestigt ist, eine relative Bewegung der Kolbenstange gegen den Dampfkolben und gegen die Queraxe C daher nicht stattfindet. Betrachtet man zunächst die Kolbenstange nebst dem Kolben und der gedachten Traverse C , so wirken auf dieses Glied ausser der Kolbenkraft P zwei Kräfte S_1 und S_2 , welche durch die Hängeschiene BC und die Parallelstange EC auf die Zapfen der Traverse C ausgeübt werden. Diese Kräfte wirken in der betrachteten Stellung der Maschine bei aufwärts gerichteter Kolbenbewegung als Druckkräfte in den Tangenten bc_1 und e_1c_2 , wie in Fig. 60 a in grösserem Maassstabe angegeben ist. Der Schnittpunkt dieser Kräfte S_1 und S_2 liegt in o_1 , und da die Kolbenkraft P nicht durch diesen Punkt o_1 hindurchgeht, so können diese drei Kräfte S_1 , S_2 und P auch für sich noch nicht im Gleichgewichte sein. Es muss vielmehr noch eine vierte Kraft hinzutreten, welche mit P zusammen eine durch o_1 gehende Mittelkraft giebt, welche also, da P um den Punkt o_1 nach links zu drehen strebt, eine rechtsläufige Drehung um o_1 hervorzubringen sucht. Diese vierte Kraft ist die von der Stopfbüchse auf die Kolbenstange ausgeübte Reaction R_1 , welche, etwa durch die Mitte der Stopfbüchse gehend unter dem Reibungswinkel gegen die Horizontale nach abwärts gerichtet, von rechts nach links wirkt. Diese Reaction R_1 schneidet die Kolbenkraft in o_2 , es muss daher, wie wiederholentlich gezeigt worden, die Verbindungslinie o_1o_2 , welche in die Figur nicht besonders eingezeichnet wurde, die Mittelkraft von S_1 und S_2 sowohl wie die von P und R_1 in sich aufnehmen. Zieht man daher durch *I* eine Parallele mit R_1 und durch *II* eine Gerade parallel mit o_1o_2 , so erhält man in *III I* die Reaction R_1 der Stopfbüchse gegen die Kolbenstange. Es zeigt sich daher auch hier wieder, wie früher in Fig. 19, Taf. II, dass trotz der Geradföhrung durch das Parallelogramm ein gewisser Seitendruck in der Stopfbüchse hervorgerufen wird, welcher seine Entstehung nicht etwaigen Ungenauigkeiten der Gelenkföhrung, sondern der Zapfenreibung an der Traverse C verdankt. Dieser Seitendruck, welcher, wie auch schon früher bemerkt wurde, seine Richtung bei dem Wechsel der Kolbenbewegung umkehrt, ist jedenfalls nur gering, und kann für gewöhnlich ausser Acht gelassen werden. Zieht man ferner durch *II* und *III* die Parallelen *II IV* und *III IV* mit den Druckrichtungen e_1c_2 der Parallelstange und c_1b der Hängeschiene, so erhält man die Kräfte der letzteren S_2 in *II IV* und S_1 in *III IV*.

Die letztgefundene Kraft $S_1 = III IV$ wird durch die Hängeschiene CB direct auf den Balancier übertragen. Auf den letzteren wirkt aber noch eine zweite Kraft an dem Bolzen G , welche zum grössten Theile von dem Widerstande der in F angehängten Luftpumpe L , zum Theile auch aus der Wirkung des Gegenlenkers ED herrührt, diese Kraft ist zunächst zu ermitteln. Es möge durch *II V* der nach abwärts gerichtete Widerstand L der Luftpumpe dargestellt sein, so wirkt dieser Widerstand L auf die Hängeschiene FG in der Tangente an den Reibungskreis von F , die von dem Durchschnittspunkte o_3 aus gezogen ist, in welchem die Kolbenkraft L der Luftpumpe von der Stopfbüchsenreaction R_2 derselben geschnitten wird. Diese

geringe Stopfbüchsenreaction R_2 und der unbeträchtliche Einfluss derselben auf die Grösse des Widerstandes L soll hier nicht weiter beachtet werden.

Fasst man nun die Hängeschiene EG ins Auge, so wirken auf dieselbe die drei Kräfte L der Luftpumpenstange in der Richtung fo_3 (s. auch Fig. 60 b), ferner die Druckkraft S_2 der Parallelschiene CE in der Richtung $e_2 e_1$ und der schon gefundenen Grösse $IV II$, endlich eine Zugkraft S_3 , welche von dem Gegenlenker ED auf die Brillenaxe E ausgeübt wird, und welche Kraft nur in der betreffenden Tangente $e_2 d_1$ an die Reibungskreise von E und D wirken kann. Diese drei Kräfte L , S_2 und S_3 müssen im Gleichgewichte gehalten werden durch eine von dem Balancierzapfen G auf die Hängeschiene GF ausgeübte Wirkung S_4 , welche zu ermitteln ist. Zu dem Ende denke man zunächst die beiden bekannten Kräfte $L = IIV$ der Luftpumpe und $S_2 = IV II$ der Parallelschiene CE zu einer Resultante $IV V$ vereinigt. Diese Resultirende geht durch den Schnittpunkt o_4 ihrer Seitenkräfte (Fig. 60 b), und wenn man daher durch o_4 eine Parallele mit $IV V$ legt, so erhält man in dem Schnitte o_5 dieser Parallelen mit der Richtung $e_2 d_1$ des Gegenlenkerzuges S_3 denjenigen Punkt, durch welchen die gedachte Reaction des Zapfens G hindurchgehen muss. Legt man daher von diesem Punkte o_5 aus die Tangente $o_5 g$ an den Reibungskreis von G , so ist die Richtung der Mittelkraft S_4 von L , S_2 und S_3 gefunden. Man hat daher im Kräftepolygon jetzt die Resultirende $IV V$ von S_2 und L nach den Richtungen $IV VI$ parallel $o_5 g$ und $VI V$ parallel $e_2 d_1$ zu zerlegen, und erhält in $V VI$ die Zugspannung S_3 des Gegenlenkers und in $IV VI$ die auf den Zapfen G des Balanciers seitens der Hängeschiene GE ausgeübte Zugkraft S_4 . Auf den Balancier wirken also von den beiden Hängeschienen die Kräfte $S_1 = III IV$ in der Richtung $c_1 b$ und $S_4 = IV VI$ in der Richtung go_5 . Die Resultirende S dieser Kräfte ist daher aus dem Kräftepolygon der Grösse und Richtung nach durch die Strecke $III VI$ dargestellt. Um auch die Lage dieser Mittelkraft zu bestimmen, hätte man durch den Durchschnittspunkt der beiden Richtungen $c_1 b$ und go_5 eine Parallele zu $III VI$ zu ziehen. Da dieser Schnittpunkt hier jedoch ausserhalb der Grenzen der Zeichnung fällt, so kann man sich zur Bestimmung der Lage von S eines Seilpolygons bedienen, welches aus dem Kräftepolygon in der bekannten Art etwa folgender Weise herzuleiten ist. Wählt man einen beliebigen Punkt O als Pol des Kräftepolygons und zieht zu den Polstrahlen $O IV$, $O VI$ und $O III$ irgendwo die bezüglichen Parallelen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ und $\alpha\gamma$, so erhält man in dem Schnittpunkte γ der mit den Polstrahlen $O VI$ und $O III$ parallel gezogenen Seilrichtungen $\beta\gamma$ und $\alpha\gamma$ einen Punkt der Mittelkraft S , welche letztere man daher durch γ parallel zu $III VI$ zeichnen kann. Zur Controle sind in der Figur zwei Seilpolygone $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ gezeichnet, die mit $III VI$ parallel ausfallende Verbindung $\gamma\gamma_1$ giebt folglich die Lage der Mittelkraft S aus dem Drucke S_1 der Hängeschiene CB und dem Zuge S_4 der Hängeschiene GE .

Das andere Ende H des Balanciers wirkt nun mittelst der Lenkerstange HJ mit einer gewissen Kraft T in der Richtung hi , d. h. tangential an die Reibungskreise der Zapfen auf die Kurbel MJ . Um diese Kraft T zu bestimmen, ist die Richtung festzustellen, in welcher das Lager des Balancierzapfens A gegen den letzteren reagirt. Diese Richtung ist durch diejenige Tangente an den Reibungskreis von A gegeben, welche durch den Durchschnitt der beiden Kräfte T und S hindurchgeht. Da auch dieser Durchschnittspunkt in der Figur nicht zugänglich ist, so kann man zur Bestimmung der Richtung dieser Zapfenreaction die schon früher in Fig. 19, Taf. II zur Anwendung gebrachte Hilfsconstruction benutzen. Zu dem Ende zeichnet man durch den Mittelpunkt des Zapfens A eine Gerade, welche auf der zu ermittelnden Reactionsrichtung voraussichtlich nahezu senkrecht steht; es möge diese Gerade die Richtungen von T und S in δ und

ε , den Reibungskreis von A in ν schneiden. Zieht man nun zu dieser Geraden irgendwo eine Parallele, welche die Kräfte T und S in δ_1 und ε_1 schneidet, und theilt diese Strecke $\delta_1 \varepsilon_1$ in ν_1 so, dass $\delta_1 \nu_1 : \varepsilon_1 \nu_1 = \delta \nu : \varepsilon \nu$, so erhält man in ν_1 einen Punkt der gesuchten Richtung von R , welche letztere daher durch die von ν_1 an den Reibungskreis von A gezogene Tangente gefunden ist. Um die Strecke $\delta_1 \varepsilon_1$ in dem besagten Verhältnisse zu theilen, kann man durch δ_1 und ε_1 zwei beliebige Parallelen $\delta_1 \delta_2$ und $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ legen, macht man dann $\delta_1 \delta_2 = \delta \nu$ und $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon \nu$, so liefert die Verbindungslinie $\delta_1 \varepsilon_1$ in ν_1 den gesuchten Theilpunkt. Ist auf diese Weise die Richtung der Lagerreaction R gefunden, so zerlegt man im Kräftepolygon die Kraft $S = III VI$ nach den Richtungen $VI VII$ parallel mit hi und $VII III$ parallel mit $\nu_1 a$ und findet in $VII VI$ die Kraft T der Lenkerstange und in $VII III$ die Reaction R des Lagerdeckels gegen den Drehzapfen A des Balanciers.

Ist nun X der Berührungspunkt der Theilkreise für die beiden Räder MX und NX , durch welche die Kraft der Dampfmaschinenwelle M auf eine Transmissionswelle N übertragen werden soll, so zeichnet man zunächst wieder die Druckrichtung der Zähne Z , indem man die Gerade xx unter etwa 75° gegen die Centrale MN im Abstände ξ von X zieht. Will man ferner auch noch das Gewicht des Schwungrades der Dampfmaschine berücksichtigen, welches wesentlich zur Vermehrung der Zapfenreibung in den Lagern von M beiträgt, so trage man im Kräftepolygon dieses bekannte Gewicht G gleich $VI VIII$ vertical abwärts gerichtet an, und erhält in der Geraden $VII VIII$ die Mittelkraft der Stangenkraft T und des Gewichtes G der Richtung und Grösse nach. Zieht man durch den Durchschnittspunkt o_6 dieser beiden Kräfte daher eine Parallele mit $VII VIII$, so bekommt man einen Durchschnittspunkt o_7 dieser Mittelkraft mit dem Räderdrucke Z in der Richtung xx . Die Reaction R' der Schwungradwelle ergibt sich daher ihrer Lage nach durch die von o_7 aus an den Reibungskreis von M gezeichnete Tangente $o_7 m$. Man hat daher schliesslich nur noch die besagte Mittelkraft $VII VIII$ nach $VIII IX$ parallel xx und $VII IX$ parallel mit $o_7 m$ zu zerlegen, um in $IX VIII$ die Grösse der Kraft Z zu finden, welche von den Zähnen des Rades MX in der Richtung xx auf das Zahngetriebe NX übertragen wird. Bezeichnet r den Arm NN_1 dieser Krafrichtung von Z in Bezug auf die Welle N und ist in dem betrachteten Augenblicke diese Welle mit einem Widerstande behaftet, dessen Moment gleich Zr ist, so genügt die Kraft der Dampfmaschine gerade zu Bewältigung des Widerstandes. Ist dagegen das Moment des zu überwindenden Widerstandes von anderer Grösse, etwa gleich Zr_1 , so wird ein Moment im Betrage $Z(r - r_1)$ entweder zur Beschleunigung der Massen verwendet, wenn $r - r_1$ positiv ist, oder durch die Massen ausgeübt werden, wenn r_1 einen grösseren Werth hat als r . Für die Untersuchung gelten alsdann die schon früher gelegentlich der Bewegung des Sägegatters, Fig. 53, Taf. VI, gemachten Betrachtungen.

Schlussbemerkung.

Die graphische Ermittlung der Kraftverhältnisse und damit des Wirkungsgrades wird in der in dem Vorhergehenden beschriebenen Weise bei irgend welchem Maschinengetriebe besondere Schwierigkeiten nicht darbieten, da es sich in jedem speciellen Falle nur um die Ein-

tragung der bezüglichen Krafrichtungen und mit deren Hülfe um die Verzeichnung des zugehörigen Kräftepolygons handelt. Diese einfache Methode bietet vor dem bisher allein gebrauchten rechnerischen Verfahren alle Vortheile der graphischen Ermittlungen überhaupt. Ihre Anwendung, lediglich auf die allgemein bekannten elementaren Grundsätze der Mechanik begründet, setzt keine Kenntniss der Analysis voraus, sie führt in den meisten Fällen viel schneller und sicherer zum Ziele, als analytische Methoden und gewährt fast immer die genügende Genauigkeit. Für das letztere Erforderniss ist es nur nöthig, die Zeichnung in nicht zu kleinem Maassstabe auszuführen, und man wird daher gut thun, bei praktischen Ermittlungen die Diagramme in drei- bis fünffach grösserem Maassstabe zu zeichnen, als dies in den Tafeln dieses Werkchens wegen der nöthigen Raumbeschränkung möglich war. Gerade wegen der Kleinheit des in den Tafeln zu Grunde gelegten Maassstabes sind auch, zur Erlangung genügender Deutlichkeit, gewisse Abmessungen grösser gewählt worden, als sie eigentlich sein dürften, z. B. wird man finden, dass die Reibungskreise der einzelnen Zapfen meistens grösser eingetragen wurden, als den betreffenden Reibungscoefficienten entspricht. Daher sind denn auch die in den einzelnen Beispielen angegebenen numerischen Resultate für die Kräfte und den Wirkungsgrad, wie schon früher bemerkt, nicht den kleinen Figuren der Tafeln, sondern besonderen grösseren Zeichnungen entnommen, in welchen alle Grössen in ihrem richtigen Verhältnisse eingetragen werden konnten. Dass man bei genügender Grösse der Zeichnungen, bei welcher die letzteren noch keineswegs unhandlich zu werden brauchen, eine für die Praxis hinreichende Genauigkeit erreichen könne, ist wohl sogleich deutlich, wenn man bedenkt, welche Unsicherheit schon von vornherein in den erfahrungsmässig ermittelten Reibungscoefficienten enthalten ist. Wohl niemals wird ein Reibungscoefficient auf mehr als zwei Decimalstellen noch mit Sicherheit anzugeben sein, wie ein Blick in die bekannten Tabellen dieser Coefficienten lehrt, und man wird daher annehmen können, dass die Reibungscoefficienten im Durchschnitt um mehrere Procente ihres Werthes Unsicherheit darbieten. Wie werthlos angesichts dieser Thatsache eine Bestimmung der Kräfte bis auf viele Decimalen, also vielleicht bis auf Hunderttausendstel ihres Betrages erscheinen muss, wie derartige Ermittlungen häufig genug in Folge analytischer Operationen gefunden werden, bedarf daher wohl keiner weiteren Ausführung. Jedenfalls geht aus obiger Bemerkung hervor, dass auch schon bei mässiger Grösse der Zeichnung die bei Anwendung scharfer Linien zu erreichende Genauigkeit eine vollkommen genügende ist. Setzte man z. B. voraus, dass ein sehr ungeübtes Auge beim Abmessen der Strecken Fehler bis zu dem grossen Betrage von 1 Millimeter begehen könnte, so würde schon bei der geringen Länge einer Kraft gleich ein Decimeter der Fehlerbetrag auf höchstens ein Procent eingeschränkt sein.

In Bezug auf die Genauigkeit des graphisch ermittelten Resultats kann man ferner bemerken, dass bei solcher Ermittlung keinerlei Veranlassung zu gewissen Annäherungsannahmen vorliegt, wie sie bei analytischen Rechnungen häufig gemacht werden, um die Formeln nicht gar zu schwerfällig werden zu lassen, ja wie sie oftmals gemacht werden müssen, wenn die Rechnung überhaupt durchführbar sein soll. Es sind derartige Fälle bereits im Vorstehenden angeführt worden, z. B. pflegt man bei Seilrollen mit nicht ganz parallelen Seilen behufs der Bestimmung des Zapfendruckes die Seilrichtungen für diesen Zweck als parallel anzunehmen, beim Kurbelgetriebe sieht man von der Neigung der Lenkerstange gegen die Geradföhrung häufig ab u. s. w. Solche Annahmen sind bei dem graphischen Verfahren unnöthig. Bei der Bestimmung der auf den Hebel einer Bandbremse auszuübenden Kraft wird bei rechnerischem Verfahren meist die Reibung vernachlässigt, welche an dem Zapfen stattfindet, an welchem

das Bremsband den Hebel ergreift, die Einführung des Reibungskreises für diesen Zapfen macht indessen beim graphischen Verfahren die Berücksichtigung auch dieses Widerstandes keineswegs umständlicher. Wenn nun auch derartige kleine Widerstände an sich meist so unerheblich sein dürften, dass eine Vernachlässigung derselben bei der Rechnung unbedenklich geschehen kann, so ist doch durch die obigen Bemerkungen festgestellt, dass die graphische Methode in derartigen Fällen präziser genannt werden darf als die analytische.

Ein besonderer Vorzug der zeichnerischen Methode besteht ferner in der grossen Anschaulichkeit, welche sie dem Ausführenden gewährt, ein Vorzug, welcher gerade für den Techniker nicht hoch genug angeschlagen werden kann. Denkt man sich z. B. für irgend ein Getriebe, beispielsweise eine Windevorrichtung, die graphische Ermittlung ausgeführt, so sind dem Auge durch die Druckrichtungen auch ohne Weiteres die Inangriffnahmen der einzelnen Theile, z. B. des Windengestelles, dargelegt, und es ist mit Hülfe der bekannten Regeln der graphischen Statik nicht schwer, aus den gefundenen, ihrer Lage, Richtung und Grösse nach bekannten Kräften für irgend einen Querschnitt des Gestelles das Angriffsmoment und daraus die erforderlichen Dimensionen herzuleiten. Auf diese Herleitung, wie überhaupt auf die Regeln der Dimensionenbestimmung, ist in dem Vorstehenden nirgend eingegangen, es muss in dieser Hinsicht auf die vorhandenen Werke über graphische Statik verwiesen werden.

Herrmann, Gustav,

Zur graphischen Statik der Maschinengetriebe ein Leitfaden zum Gebrauche für
Maschinentechniker, Baumeister und Ingenieure sowie zum Unterrichte an
technischen Lehranstalten
Bd.: [1]

Braunschweig 1879

4 Math.a. 142 d-1/2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11383627-1